

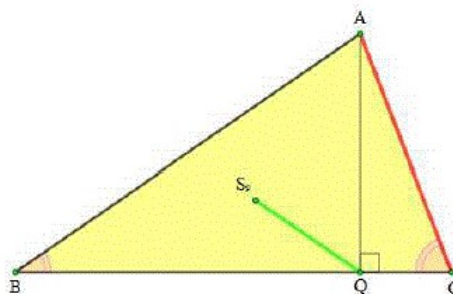
Del 16 de Marzo al 30 de abril de 2020

Propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega, profesor de Matemáticas en el IES "Bartolomé-José Gallardo" de Campanario (Badajoz), a partir de un problema de Ercole Suppa publicado en Perú Geométrico con su permiso (Agradezco a Ercole su predisposición).

Problema 941.-

Ejercicio 1.

- ① Dado un triángulo ABC , se consideran su punto de Spieker S_p y el pie Q de la altura correspondiente al vértice A sobre la recta BC , tal como se muestra en la siguiente figura:

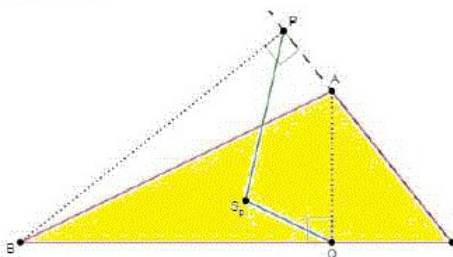


Probar que:

$$AC = 2QS_p \Leftrightarrow \angle CBA = 2\angle ACB$$

(propuesto por Ercole Suppa)

- ② Dado un triángulo ABC , se consideran su punto de Spieker S_p y los pies Q y P de las alturas correspondientes a los vértices A y B sobre las rectas BC y AC , respectivamente, tal como se muestra en la siguiente figura:



Probar que:

$$\begin{cases} AC = 2QS_p \\ AB = 2PS_p \end{cases} \Leftrightarrow ABC \text{ es un triángulo heptagonal}$$

Pérez García, M.A. (2020): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

Vamos a calcular la longitud del segmento QS_p .

Tomando coordenadas baricéntricas referidas al triángulo ABC y con $S_A = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2}$, y expresiones análogas para S_B , S_C , $S_B + S_C = a^2$; $S_A + S_C = b^2$; $S_B + S_A = c^2$ tenemos para estos puntos $S_p = (b+c : c+a : a+b)$ y $Q = (0 : S_C : S_B)$.

$$\text{Se tiene } \overrightarrow{QS_p} = \frac{1}{4a^2s} (a^2S_p - 4sQ) = \left(\frac{b+c}{4s}, -\frac{b}{4s} - \frac{b^2-c^2}{2a^2}, -\frac{c}{4s} + \frac{b^2-c^2}{2a^2} \right) = (x_0, y_0, z_0)$$

Para el vector (x_0, y_0, z_0) se tiene $|(x_0, y_0, z_0)|^2 = x_0^2 \cdot S_A + y_0^2 \cdot S_B + z_0^2 \cdot S_C$

$\overrightarrow{QS_p}$ es de la forma $(m+n, -m-p, -n+p)$, donde $m = \frac{b}{4s}$; $n = \frac{c}{4s}$ y $p = \frac{b^2-c^2}{2a^2}$.

Por tanto, podemos poner para el cuadrado de su longitud

$$(m+n)^2(b^2 - S_C) + (m+p)^2(a^2 - S_C) + (n-p)^2 S_C =$$

$$a^2(m+p)^2 + b^2(m+n)^2 - 2S_C(m+n)(m+p)$$

Y ahora sustituyendo $2S_C = a^2 + b^2 - c^2$, $m = \frac{b}{4s}$; $n = \frac{c}{4s}$ y $p = \frac{b^2 - c^2}{2a^2}$:

$$QS_p^2 = a^2 \left(\frac{b}{4s} + \frac{b^2 - c^2}{2a^2} \right)^2 + b^2 \left(\frac{b}{4s} + \frac{c}{4s} \right)^2 - (a^2 + b^2 - c^2) \left(\frac{b}{4s} + \frac{c}{4s} \right) \left(\frac{b}{4s} + \frac{b^2 - c^2}{2a^2} \right)$$

Desarrollando y simplificando queda finalmente

$$QS_p^2 = \frac{1}{8as} (-a^2bc + a(b^3 + c^3) + (b^2 - c^2)^2)$$

Y este valor ha de ser igual a $\frac{c^2}{4}$ por tanto se ha de verificar la ecuación

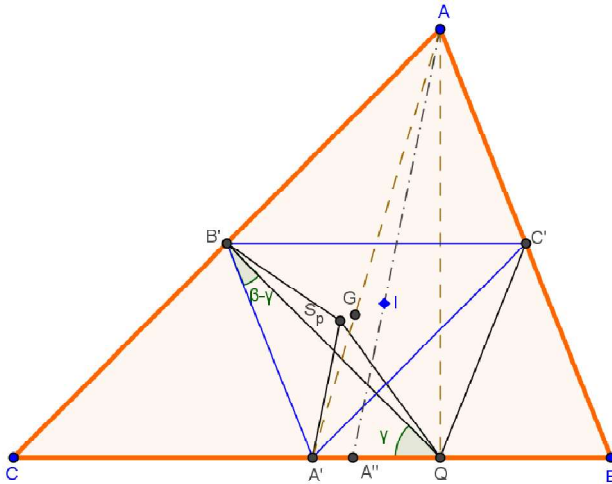
$$-a^2bc + a(b^3 + c^3) + (b^2 - c^2)^2 - a(a+b+c)c^2 = 0$$

Esa expresión factoriza de la siguiente manera

$$a^2bc - a(b^3 + c^3) - (b^2 - c^2)^2 + a(a+b+c)c^2 = (b+c)(a+b-c)(ac - b^2 + c^2)$$

$$QS_p^2 - \frac{c^2}{4} = \frac{(s-c)(b+c)(ac - b^2 + c^2)}{4as}$$

Por tanto, la longitud de QS_p es $\frac{c}{2}$ si y sólo si $ac - b^2 + c^2 = 0$.



1) Sea $A'B'C'$ el triángulo medial. Sus bisectrices, paralelas a las de ABC definen el punto S_p .

El segmento $A'S_p = \frac{AI}{2}$ como es fácil ver en la figura; se tienen $\angle S_p A' Q = \theta = \frac{\alpha}{2} + \gamma$ y $A'Q = \frac{a}{2} - c \cdot \cos \beta$

También podemos calcular $B'Q$ por el teorema del coseno aplicado al triángulo $AB'Q$: tenemos $h_A = b \cdot \sin \gamma$ y $AB' = \frac{b}{2}$.

$$B'Q^2 = h_A^2 + \frac{b^2}{4} - b \cdot h_A \cdot \sin \gamma = \frac{b^2}{4} \Rightarrow B'Q = \frac{b}{2}$$

Esto nos indica que $B'QA$ es un triángulo isósceles y por tanto también el $CB'Q$. Aquí podemos calcular el valor del lado $A'Q$

$$A'Q = \frac{a}{2} - \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a} = \frac{b^2 - c^2}{2a}$$

($\Leftrightarrow$) Si $\beta = 2\gamma$, entonces $\Delta B'A'Q$ es isósceles y $A'B' = A'Q = \frac{c}{2}$. Por ser S_p el incentro del triángulo medial el $\angle S_p B'A' = \frac{\beta}{2} = \gamma = \angle Q B'A'$. S_p está alineado con B' y Q . El ángulo $\angle S_p A'Q = \frac{\alpha}{2} + \gamma = 90 - \frac{\gamma}{2}$ y entonces también $\Delta A'S_pQ$ es isósceles, (siendo el ángulo en Q el desigual) y por tanto $S_pQ = \frac{c}{2}$ como se pretendía demostrar.

($\Rightarrow$) Si $S_p Q = \frac{c}{2}$ según hemos visto antes, $ac - b^2 + c^2 = 0$, de donde $c = \frac{b^2 - c^2}{a} = 2A'Q$. El triángulo $\Delta B'A'Q$ es isósceles por ello $\sphericalangle B'QA' = \gamma = \sphericalangle QB'A' = \beta - \gamma$ como queríamos concluir.

2) Es consecuencia de 1) que nos lleva a demostrar que el ángulo α es el doble del β y en consecuencia el triángulo ABC es heptagonal. ■