Pr. Cabri 942

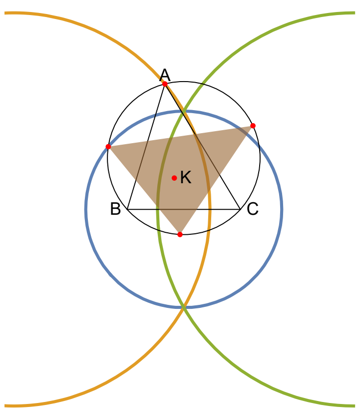
Enunciado

Dado un segmeneto BC, determinar el lugar geométrico que describe el punto A para que el área del triángulo circunceviano
del punto simediano K del triángulo ABC coincida con el área de dicho triángulo.
Propuesto por Pérez-García M. A. (2020)

Solución

de César Beade Franco

Consideremos el triángulo de vértices A(x,y), B(0,0) y C(1,0).
Su triángulo circunceviano para un punto P(p,q) cualquiera tiene vértices (1)
$A' = \left(\frac{(-q x+p y)\left(p-(1+p) x+x^2-q y+y^2\right)}{\left((p-x)^2+(q-y)^2\right) y}, \frac{(q-q x+(-1+p) y)(-q x+p y)}{\left((p-x)^2+(q-y)^2\right) y}\right)$,
$B' = \left(\frac{p\left(p y+q\left((-1+x) x+y^2\right)\right)}{\left(p^2+q^2\right) y}, \frac{q\left(p y+q\left((-1+x) x+y^2\right)\right)}{\left(p^2+q^2\right) y}\right)$ y $C' =$
$\left(\frac{q\left(q y+(-1+p)\left((-1+x) x+y^2\right)\right)}{\left((-1+p)^2+q^2\right) y}, \frac{q\left(y-p y+q\left((-1+x) x+y^2\right)\right)}{\left((-1+p)^2+q^2\right) y}\right)$
Su punto de Lemoine es ($\frac{x+x^2+y^2}{2\left(1-x+x^2+y^2\right)}, \frac{y}{2\left(1-x+x^2+y^2\right)}$), que sustituido
en la expresión anterior y simplificando nos da los vértices
A'=($\frac{x(-1+2 x)+2 y^2}{(1-2 x)^2+4 y^2}, -\frac{y}{(1-2 x)^2+4 y^2}$),B'=($\frac{2\left(x+x^2+y^2\right)}{(1+x)^2+y^2}, \frac{2 y}{(1+x)^2+y^2}$) y
C'=($-1+\frac{4-2 x}{(-2+x)^2+y^2}, \frac{2 y}{(-2+x)^2+y^2}$).
Igualando su área a $\frac{b}{2}$, la de ABC,
obtenemos la ecuación $\frac{27\left((-1+x)^2+y^2\right)\left(x^2+y^2\right)}{\left((-2+x)^2+y^2\right)\left((1+x)^2+y^2\right)\left((1-2 x)^2+4 y^2\right)}=1$,
y resolviéndola para y^2 nos proporciona las soluciones
$y^2=\frac{1}{2}+x-x^2$, $y^2=2-2x-x^2$, $y^2=3+4x-x^2$,
ecuaciones de 3 circunferencias con centros en la recta BC, que son el lugar geométrico buscado.
La primera centro C1=(0,$\frac{1}{2}$) y radio r1=3, la segunda C2=(0,-1) y r2=2, la tercera C3=(0,2) y r3=2.



(1) A’=AP∩BC. Resolviendo el sistema correspondiente se obtiene este punto así como B’ y C’.
Si bien yo utilizo un miniprograma con la sintáxis Corte4P[{{A,P},{B,C}}] que proporciona directamente A’ en función de las coordenadas de A, P, B, y C.