

TRIÁNGULOS CABRI

Problema 942. (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dado un segmento BC , determinar el lugar geométrico que describe el punto A para que el área del triángulo circunceviano del punto simediano K del triángulo ABC coincida con el área de dicho triángulo.

Solución:

Si A es uno de estos puntos, considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC , como:

$$K = (a^2 : b^2 : c^2) \Rightarrow \begin{cases} AK \equiv 0 = c^2y - b^2z \\ BK \equiv 0 = c^2x - a^2z \\ CK \equiv 0 = b^2x - a^2y \end{cases}$$

y la ecuación de su circunferencia circunscrita es:

$$c^2xy + b^2xz + a^2yz = 0$$

resolviendo los correspondientes sistemas de ecuaciones, podemos obtener las coordenadas de los vértices del triángulo circunceviano del punto K :

$$\begin{cases} U = (-a^2 : 2b^2 : 2c^2) \\ V = (2a^2 : -b^2 : 2c^2) \\ W = (2a^2 : 2b^2 : -c^2) \end{cases}$$

Además, como:

$$\begin{aligned} \frac{(UVW)}{(ABC)} &= \frac{\begin{vmatrix} -a^2 & 2b^2 & 2c^2 \\ 2a^2 & -b^2 & 2c^2 \\ 2a^2 & 2b^2 & -c^2 \end{vmatrix}}{(-a^2 + 2b^2 + 2c^2)(2a^2 - b^2 + 2c^2)(2a^2 + 2b^2 - c^2)} \\ &= \frac{27a^2b^2c^2}{(-a^2 + 2b^2 + 2c^2)(2a^2 - b^2 + 2c^2)(2a^2 + 2b^2 - c^2)} \end{aligned}$$

entonces, si el área del triángulo circunceviano del punto simediano K del triángulo ABC coincide con el área del triángulo ABC , resulta que:

$$0 = \frac{(UVW)}{(ABC)} - 1 = \frac{2(-2a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - 2b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - 2c^2)}{(-a^2 + 2b^2 + 2c^2)(2a^2 - b^2 + 2c^2)(2a^2 + 2b^2 - c^2)} \Rightarrow \begin{cases} -2a^2 + b^2 + c^2 = 0 \\ \quad \quad \quad \text{ó} \\ a^2 - 2b^2 + c^2 = 0 \\ \quad \quad \quad \text{ó} \\ a^2 + b^2 - 2c^2 = 0 \end{cases}$$

Finalmente, considerando el sistema de referencia cartesiano de ejes rectangulares con origen en el punto medio M del segmento BC y eje de abscisas en la recta BC y tomando como unidad de medida la semilongitud del segmento BC , si $A = (x, y)$ ($y \neq 0$), como:

$$\begin{cases} C = (1, 0) \\ B = (-1, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = BC = 2 \\ b = AC = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \\ c = AB = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \end{cases}$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

TRIÁNGULOS CABRI

entonces:

$$\begin{cases} (x+3)^2 + y^2 = 12 \\ \quad \quad \quad \text{ó} \\ x^2 + y^2 = 3 \\ \quad \quad \quad \text{ó} \\ (x-3)^2 + y^2 = 12 \end{cases}$$

por lo que el lugar geométrico pedido está formado por la unión de la circunferencia con centro en el punto C' simétrico del punto C y respecto al punto B y radio $\sqrt{3} BC$, la circunferencia con centro en el punto medio M del segmento BC y radio $\frac{\sqrt{3}}{2}BC$ y la circunferencia con centro en el punto B' simétrico del punto B y respecto al punto C y radio $\sqrt{3} BC$.

