Del 16 de Marzo al 30 de abril de 2020

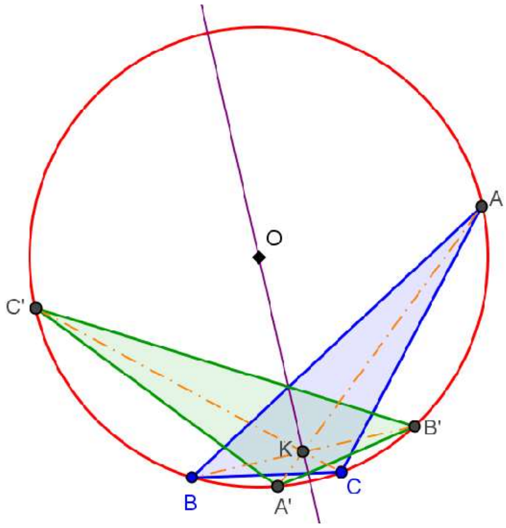
Propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega, profesor de Matemáticas en el IES "Bartolomé-José Gallardo" de Campanario (Badajoz).

Problema 942

Ejercicio **2735**. *Dado un segmento BC, determinar el lugar geométrico que describe el punto A para que el área del triángulo circunceviano del punto simediano K del triángulo ABC coincida con el área de dicho triángulo*.

Pérez García, M.A. (2020): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



La mediana y la simediana son conjugadas isogonales, por tanto, si tomamos el punto del infinito de la mediana desde un vértice, su conjugado isogonal es el punto en que la simediana corta a la circunscrita, y esto último por ser la circunferencia circunscrita transformada isogonal de la recta del infinito.

Para la mediana desde A, el punto del infinito es $U=\left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, por tanto un vértice del triángulo circunceviano de K es $A' = (-a^2{:}\,2b^2{:}\,2c^2)$ y, de forma análoga los otros dos son $B' = (2a^2{:} -b^2{:}\,2c^2)$ y $C' = (a^2{:}\,b^2{:} -c^2)$.

La razón de las áreas del triángulo circunceviano y el triángulo ABC es la de los determinantes formados por las coordenadas absolutas de estos triángulos, así pues, se tendrá

$$\begin{vmatrix} -a^2 & 2b^2 & 2c^2 \\ 2a^2 & -b^2 & c^2 \\ 2a^2 & 2b^2 & -c^2 \end{vmatrix} = 27 \cdot a^2b^2c^2$$

Ese valor ha de ser igual al producto de la suma de las coordenadas de los puntos del triángulo circunceviano, por tanto se tiene finalmente

$$27a^2b^2c^2 = [2(b^2+c^2)-a^2]\cdot[2(a^2+c^2)-b^2]\cdot[2(a^2+b^2)-c^2]$$

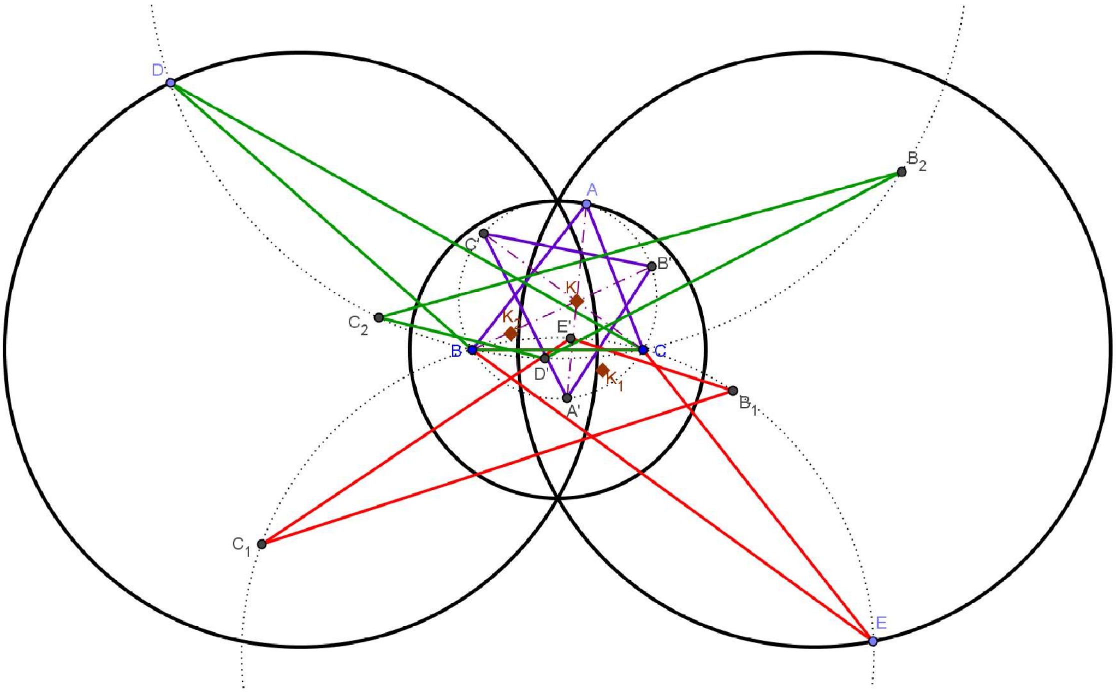
O bien, pasando todo a un miembro y factorizando se llega a

$$27a^2b^2c^2 - [2(b^2+c^2)-a^2]\cdot[2(a^2+c^2)-b^2]\cdot[2(a^2+b^2)-c^2] =$$

$$\boxed{2(b^2+c^2-2a^2)(b^2-2c^2+a^2)(2b^2-c^2-a^2)=0}$$

Tomamos $b^2+c^2-2a^2=0$; si se supone dado el segmento BC, o sea, el valor de a, y suponiendo unos ejes cartesianos con centro en el extremos B y C del segmento BC y con éste como soporte del eje de abscisas, el vértice $A(x,y)$ es tal que la suma de los cuadrados de su distancia a los extremos de BC es igual a $2a^2$, es decir que el vértice A verifica la ecuación

$(x^2+y^2)+((x-a)^2+y^2) = 2a^2 \Leftrightarrow x^2+y^2-ax = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow \boldsymbol{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{3}{4}a^2}$ que es una circunferencia de centro el punto medio de BC y radio $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.



De $b^2 - 2c^2 + a^2 = 0$ razonando como antes tendremos para A, la ecuación $(x^2 + y^2) - 2((x-a)^2 + y^2) + a^2 = 0$, o bien $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{2a})^{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{3a}^{\boldsymbol{2}}$ que es otra circunferencia con centro en $(2a, 0)$ y radio$\sqrt{3}a$.

A partir de $2b^2 - c^2 - a^2$, se obtiene $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a})^{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{3a}^{\boldsymbol{2}}$. Otra circunferencia de igual radio que la anterior y centro en el punto $(-a, 0)$.

En la figura, son las tres circunferencias de color negro. Se ha dibujado un triángulo y su circunceviano de igual área del mismo color tomando BC fijo y un tercer vértice variable en cada una de esas circunferencias. ■