

Pr. Cabri 943

Enunciado

Dado un segmento BC, determinar el lugar geométrico que describe el punto A para que el baricentro G, el incentro I y el punto de Gergonne Ge del triángulo ABC, estén alineados.

Pérez-García M. A. (2020).

Solución

de César Beade Franco

Solución retórica

Ge está situado en la recta IP siendo P el corte de la perpendicular por I a un lado del triángulo. En caso de alineación, G estará situado sobre esa perpendicular. Pero IG solo es perpendicular a un lado cuando el triángulo es isósceles respecto a ese lado.

Esto significa que A puede describir sendas circunferencias centradas en B y C y de radio BC (isósceles en B o C), o bien la recta perpendicular a BC por su punto medio (isósceles en A).

Solución analítica

Consideremos un EH-triángulo (*) $A(e, h, \sqrt{(-1+e^2)(1-h^2)})$, $B(-1,0)$ y $C(1,0)$.

los punto en cuestión tienen las coordenadas $G=(\frac{eh}{3}, \frac{1}{3}\sqrt{(-1+e^2)(1-h^2)})$,

$I=(h, \frac{\sqrt{(-1+e^2)(1-h^2)}}{1+e})$ y $Ge=(\frac{h(2+e(-3+h^2))}{1-2e+h^2}, \frac{(1-h^2)\sqrt{(-1+e^2)(1-h^2)}}{-1+2e-h^2})$.

Están alineados si $\text{Det}[I-G, G-Ge]=0$.

El valor de ese determinante es $\frac{2e\sqrt{(-1+e^2)(-1+h^2)}(e^2-(2+h)^2)}{3(-1+h)(1+e^2+2h)}$ y se anula, excluyendo el caso degenerado ($e=0$), si $h=0$ y

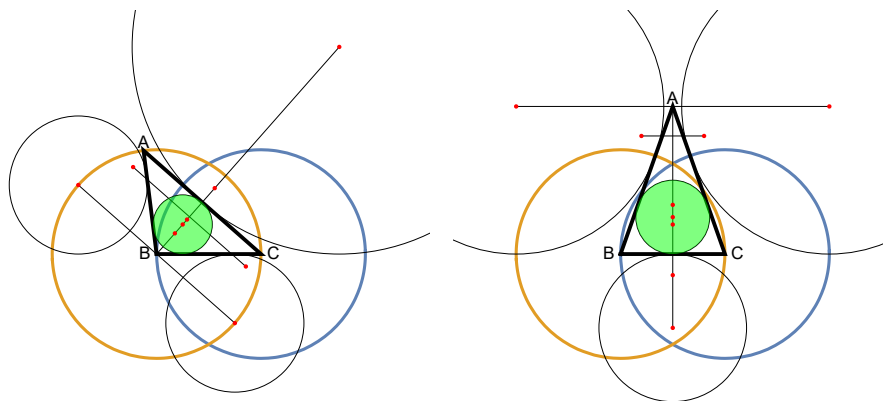
$-4+4e-e^2+h^2=0$ que resolviendo para h nos da $h=\pm(e-2)$, con $1<e<3$.

Como los lados de esta triángulo miden $a=2$, $b=e-h$ y $c=e+h$, la condición anterior significa que el triángulo ha de ser isósceles en B o en C. Y si $h=0$, el triángulo es isósceles en A.

Obtenemos el lugar geométrico citado anteriormente.

Vemos un dibujo con uno de esos triángulos isósceles en B. Y otro en A.

Out[336]=



Podemos considerar todos los incírculos y los correspondientes puntos de Gergonne. Si el triángulo es isósceles en B (dibujo), I_b y G_b están también en esa línea junto con B. Y esta línea es la mediatriz de G_{ea} y G_{ec} . Si lo es en A los alineados son A, G_e , I , G, G_a , I_a .

Notas

(*) Me remito a problemas (689, 897 entre otros) anteriores donde se utiliza y explica este sistema de referencia que facilita los cálculos en los casos en que aparecen incírculos.