Problema 944.-

Construir un triángulo conociendo $b + c = s$, $AM_a = m_a$ $(mediana)$, $AD_a = d_a$ $(bisectriz\ interna)$.

Lópes, L. (2020): Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba (España).

De las relaciones de la mediana y de la bisectriz interna en función de los lados del triangulo ΔABC, tenemos que:

$$\left\{4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2; d_a^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}\right\}.$$

Al expresar estas relaciones en función de la suma $b + c = s$, podemos llegar a obtener el sistema:

$$\left\{4m_a^2 = 2\,s^2 - 4\,bc - a^2; d_a^2 = bc - \frac{a^2bc}{s^2}\right\}.$$

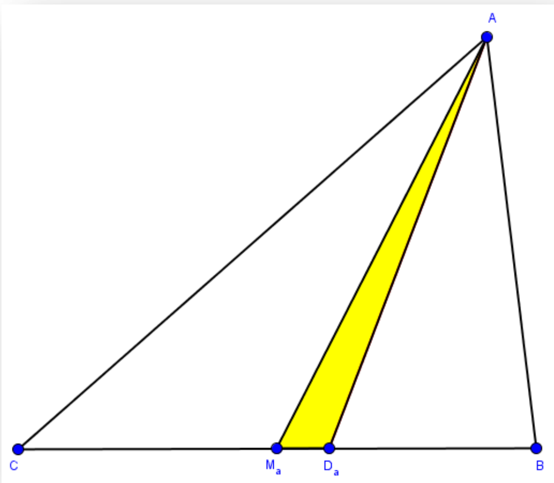
Ahora bien si llamamos $bc = t$, entonces el anterior sistema adopta la forma:

$\left\{4m_a^2 = 2\,s^2 - 4\,t - a^2; d_a^2 = t - \frac{a^2t}{s^2}\right\}$ donde todos los valores son conocidos excepto $a\ y\ t$. Si resolvemos este sistema de ecuaciones podemos expresar tanto $t = bc$, como a de la forma:

$$\mathrm{a}^2 = \frac{1}{2}\left(3\mathrm{s}^2 - 4{m_a}^2 - \sqrt{(\mathrm{s}^2 - 4m_a^2)^2 + 16\,\mathrm{s}^2\mathrm{d}_\mathrm{a}^2}\right) \rightarrow \mathrm{a} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(3\mathrm{s}^2 - 4{m_a}^2 - \sqrt{(\mathrm{s}^2 - 4m_a^2)^2 + 16\,\mathrm{s}^2\mathrm{d}_\mathrm{a}^2}\right)}$$

$$t = bc = \frac{1}{8}\left(\mathrm{s}^2 - 4{m_a}^2 + \sqrt{((s^2 - 4{m_a}^2)^2 + 16\mathrm{s}^2\mathrm{d}_\mathrm{a}^2}\right)$$

Veamos ahora el triángulo ΔAM_aD_a del que conocemos dos de sus lados, $m_a\,y\,d_a$ y el tercer lado $M_aD_a = x$, verifica por el Teorema de la bisectriz,



$$\frac{b}{\frac{a}{2}+x} = \frac{c}{\frac{a}{2}-x} \rightarrow \frac{b-c}{2x} = \frac{b+c}{a};$$

Por tanto,

$$x = \frac{a(b-c)}{2(b+c)} \rightarrow x^2 = \frac{a^2((b+c)^2 - 4bc)}{2(b+c)}$$

En definitiva, podemos hallar:

$$\mathrm{x}^2 = \frac{\mathrm{a}^2(\mathrm{s}^2 - 4\mathrm{t})}{2\mathrm{s}}.$$

Sustituyendo los valores de $a\ y\ t = bc$, antes obtenidos, llegamos a obtener que:

$$x = M_aD_a = \sqrt{\frac{1}{4}\left(s^2 + 4{d_a}^2 - \sqrt{(s^2 - 4{m_a}^2)^2 + 16s^2{d_a}^2}\right)}$$

La construcción del ΔABC a partir del ΔAM_aD_a ya resulta trivial. Bastará con prolongar el lado M_aD_a hasta obtener $M_aC = M_aB = \frac{a}{2}$.