

Propuesto por Luis Lopes, (Río de Janeiro), investigador, escritor y editor de libros de matemáticas.

Problema 944.

Construir un triángulo conociendo $b+c=s$, $AM_a=m$ (mediana), $AD_a=d$ (bisectriz interna)

Lopes, L. (2020): Comunicación personal.

Solución de Luis Lopes(Río de Janeiro), investigador, escritor y editor de libros de matemáticas.

Sejam $\langle b+c=s \rangle$, $\langle AM_a=m_a=m \rangle$ e $\langle AD_a=d_a=d \rangle$. Como conhecido em uma das resoluções do problema $\langle \alpha, m_a, d_a \rangle$ (para outras construções, ver exercício 75 em [†]), temos:

$$s^2 - 2ds \frac{\sin^2 t}{\cos t} - 4m^2 = 0, \quad (*)$$

onde $t = \alpha/2$. Usando a relação $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$, após algumas manipulações elementares podemos escrever (*) como

$$(s \cos t)^2 + \frac{s^2 - (2m)^2}{2d} s \cos t - s^2 = 0 \quad (**)$$

Construindo o comprimento $u = \frac{(s-2m)(s+2m)}{2d}$ e pondo $s \cos t = x$, a equação (**) torna-se

$$x^2 + ux - s^2 = 0 \quad (***)$$

Resolvendo (***) graficamente, obtemos x e $AM_a = x/2$, onde M_a é a projeção ortogonal de M_a na bissetriz interna do vértice A . Tem-se então a seguinte construção:

- i) numa reta $\mathfrak{d}_a$ qualquer colocar os pontos A , D_a e M_a tais que $AD_a = d$ e $AM_a = x/2$;
- ii) construir a reta $\mathfrak{S}_D$ passando por M_a e perpendicular à reta $\mathfrak{d}_a$. Traçar o arco $\phi_1 = (A, m)$ e obter o ponto $M_s = \mathfrak{S}_D \cap \phi_1$;
- iii) traçar a reta $\mathfrak{a} = (D_a, M_a)$;
- iv) traçar o arco $\phi_2 = (A, s/2)$ e obter os pontos $R = \mathfrak{S}_D \cap \phi_2$ e $S = \mathfrak{S}_D \cap \phi_2$;
- v) traçar as retas $\mathfrak{b} = (A, S)$ e $\mathfrak{c} = (A, R)$ e obter os pontos $B = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}$ e $C = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.

O problema tem no máximo uma solução.

Observação: a reta $\mathfrak{S}_D$ é a Simson do ponto D , interseção da bissetriz interna do vértice A com o circuncírculo Γ .

O problema $\langle b-c, m_a, e_a \rangle$ pode ser resolvido de uma maneira similar, onde e_a é a bissetriz externa de A .

[†\) Construcciones geométricas Escuela de Maestros](#)

