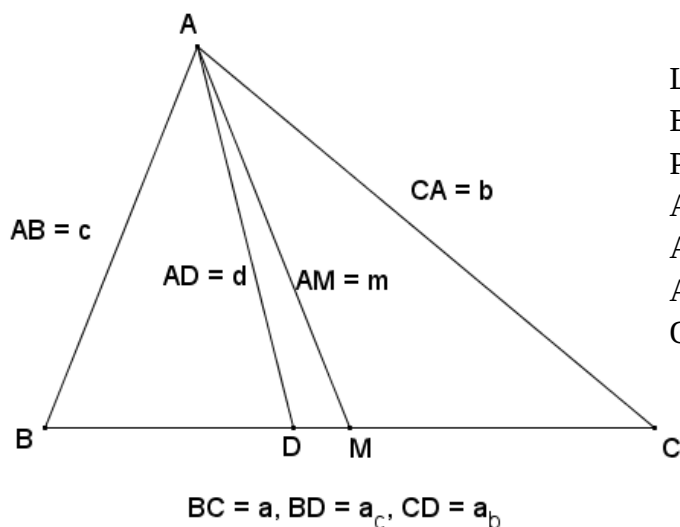


Problema 944.

Construir un triángulo conociendo $b + c = s$, $AMa = m$ (mediana), $ADa = d$ (bisectriz interna)

Lopes, L. (2020): Comunicación personal.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche

Les côtés du triangle ABC ont pour dimensions :

$BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$

Par hypothèse on connaît :

$AC + AB = b + c = s$

AD (bissectrice issue de A) $= d$

AM (médiane issue de A) $= m$

On pose $BD = a_c$ et $CD = a_b$ avec $a = a_b + a_c$

On va déterminer a, b et c en fonction des paramètres d, m et s

Lemme n°1 : la longueur de la bissectrice AD s'exprime en fonction des côtés du triangle ABC selon la formule $d^2 = bc[(b+c)^2 - a^2] / (b+c)^2$

Démonstration. On a les relations $a_c/c = a_b/b = a/(b+c)$. D'où $a_b = ab/(b+c)$ et $a_c = ac/(b+c)$

D'après le théorème de Stewart $b^2 \cdot BD + c^2 \cdot CD = a \cdot (d^2 + BD \cdot CD)$, soit $b^2 \cdot a_c + c^2 \cdot a_b = a(d^2 + a_b \cdot a_c)$

ou encore $(b^2c + bc^2)/(b+c) = d^2 + a^2 \cdot bc/(b+c)^2$. D'où la formule supra. C.q.f.d.

Lemme n°2 : la longueur de la médiane issue de A est donnée par la formule supposée connue

$$m^2 = (b^2 + c^2)/2 - a^2/4$$

On en déduit $d^2 = bc[1 - s^2/a^2]$ et $4m^2 = (2s - 4bc - a^2)$.

Il suffit d'éliminer bc des deux équations précédentes et en posant $x = a^2$, on obtient une équation du second degré en x qui prouve que x et donc a qui en est la racine carrée sont constructibles à la règle et au compas.

$$\text{soit } x^2 - (3s^2 - 4m^2)x + s^2(2s^2 - 4m^2 - 4d^2) = 0$$

Le discriminant Δ de cette équation est égal à $(s^2 - 4m^2)^2 + 16s^2d^2 > 0$

$$\text{La valeur du côté } a \text{ obéit alors à la formule } a = \sqrt{\frac{3s^2 - 4m^2 - \sqrt{\Delta}}{2}}$$

Par ailleurs on connaît la somme $b + c = s$ et le produit $bc = s^2d^2/(s^2 - a^2)$. Les côtés b et c sont alors les racines d'une équation du second degré de la forme $x^2 - sx + s^2d^2/(s^2 - a^2) = 0$ et sont donc constructibles à la règle et au compas.

Les trois côtés a, b et c étant connus, la construction du triangle ABC est immédiate.