Pr. Cabri 945

Enunciado

Dado un triángulo ABC de incentro I, sean D,E,F las reflexiones de I en los lados BC, CA, AB, respectivamente. Las intersecciones de la altura por A con DF, DE son Ab y Ac, respectivamente. Las intersecciones de la altura por B con ED, EF son Bc y Ba, respectivamente. Las intersecciones de la altura por C con FE, FD son Ca y Cb, respectivamente. Si l, m, n son las longitudes de los segmentos AbAc, BcBa, CaCb, demostrar que una de esta longitudes es la suma de las otras dos.
Esta propiedad también se tiene cuando se sustituye el incentro por cada exincentro.

Propuesto por Ángel Montesdeoca Delgado.

Solución

de César Beade Franco

Consideremos un EH-triángulo (*) A($e\,h$, s), B(-1,0) y C(1,0).
El incentro de este triángulo es I(h, $\frac{s}{1+e}$). Los puntos D, E y F son
D(h, $\frac{-s}{1+e}$), E(h, $\frac{-2+h^2+e\left(2+h-2h^2\right)}{e-h}$, $-\frac{s\,(-2+h+e\,(-1+2h))}{(1+e)\,(e-h)}$) y F($\frac{2-h^2+e\left(-2+h+2h^2\right)}{e+h}$, $\frac{s\,(2+e+h+2\,e\,h)}{(1+e)\,(e+h)}$).
La intersección de la altura desde A con DE y DF nos proporciona los puntos Ab($e\,h$, $\frac{(-1+e\,h)\,s}{(1+e)\,(1+h)}$) y Ac($e\,h$, $\frac{(1+e\,h)\,s}{(1+e)\,(-1+h)}$).

La distancia l=AbAc mide $|Ac-Ab|=2\sqrt{\frac{\left(-1+e^2\right)h^2}{1-h^2}}$ que aplicando el cambio descrito en (*) queda

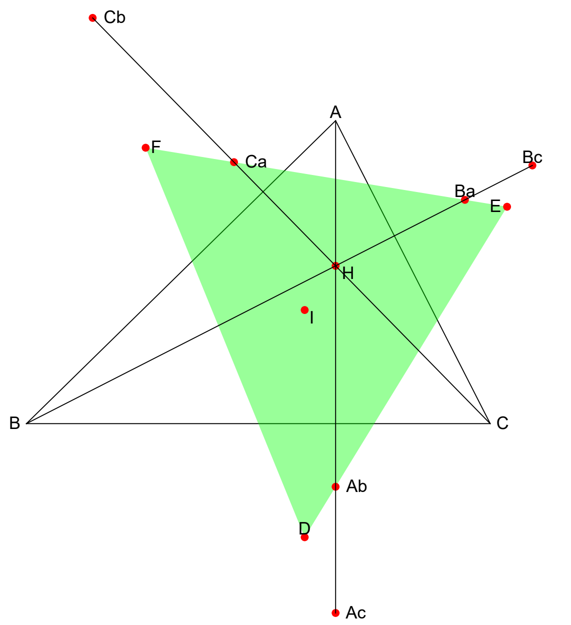
$$l=\frac{(b-c)\sqrt{-a^2+(b+c)^2}}{\sqrt{a^2-(b-c)^2}}=\frac{(b-c)\sqrt{a+b+c}\,\sqrt{-a+b+c}}{\sqrt{a+b-c}\,\sqrt{a-b+c}}.$$

Renombrando los vértices obtenemos $m=\frac{(c-a)\sqrt{a-b+c}\,\sqrt{a+b+c}}{\sqrt{a+b-c}\,\sqrt{-a+b+c}}$ y $n=\frac{(a-b)\sqrt{a+b-c}\,\sqrt{a+b+c}}{\sqrt{a-b+c}\,\sqrt{-a+b+c}}$.

Estas distancias tienen signo pues alguno de esos sumandos es negativo.
Resulta que

$$l+m+n=\frac{(b-c)\sqrt{a+b+c}\,\sqrt{-a+b+c}}{\sqrt{a+b-c}\,\sqrt{a-b+c}}+\frac{(c-a)\sqrt{a-b+c}\,\sqrt{a+b+c}}{\sqrt{a+b-c}\,\sqrt{-a+b+c}}+\frac{(a-b)\sqrt{a+b-c}\,\sqrt{a+b+c}}{\sqrt{a-b+c}\,\sqrt{-a+b+c}}=$$
$$\frac{(b-c)\sqrt{s}\,\sqrt{s-a}}{\sqrt{s-b}\,\sqrt{s-c}}+\frac{(c-a)\sqrt{s}\,\sqrt{s-b}}{\sqrt{s-c}\,\sqrt{s-a}}+\frac{(a-b)\sqrt{s}\,\sqrt{s-c}}{\sqrt{s-a}\,\sqrt{s-c}}=0,$$

lo que nos indica que, en valor absoluto, siempre hay un sumando (distancia) igual a la suma de los otros dos.



La simetría de l+m+n nos sugiere que si intercambiamos s con s-a obtendríamos un resultado análogo para el incentro correspondiente a A. Y lo mismo sucedería para los otros incentros.

(*) $S=\sqrt{(e^2-1)\ (1-h^2)}$ es el área del triángulo.

Multplicando cada punto por $\frac{a}{2}$ y haciendo el cambio $e=\frac{c+b}{a}$, $h=\frac{c-b}{a}$, el triángulo se transforma en otro

A($\frac{(-b+c)\ (b+c)}{2\ a}$, $\frac{1}{2}\ a\sqrt{\left(1-\frac{(b-c)^2}{a^2}\right)\left(-1+\frac{(b+c)^2}{a^2}\right)}$), B(-$\frac{a}{2}$,0) y C($\frac{a}{2}$,0), de lados a, b, c.