Propuesto por Ángel Montesdeoca Delgado,
Angel Montesdeoca Delgado estudioso de Geometría

Problema 945

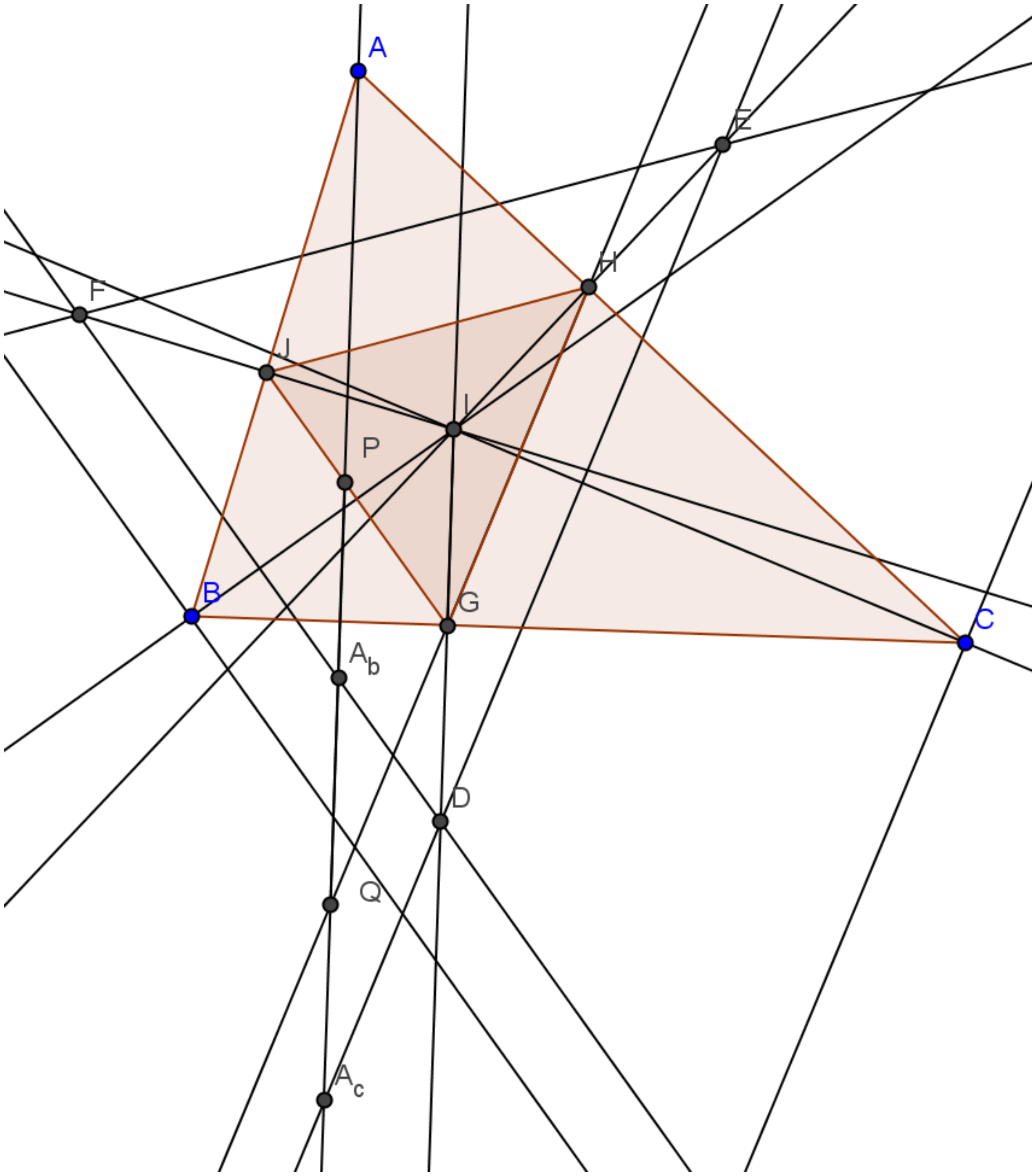
Dado un triángulo ABC de incentro I, sean D,E,F las reflexiones de I en los lados BC, CA, AB, respectivamente. Las intersecciones de la altura por A con DF, DE son Ab y Ac, respectivamente. Las intersecciones de la altura por B con ED, EF son Bc y Ba, respectivamente. Las intersecciones de la altura por C con FE, FD son Ca y Cb, respectivamente. Si l, m, n son las longitudes de los segmentos AbAc, BcBa, CaCb, demostrar que una de esta longitudes es la suma de las otras dos.

Esta propiedad también se tiene cuando se sustituye el incentro por cada exincentro.

Montesdeoca, A. (2020): Comunicación personal.

Solución de la primera parte del director

Supongamos sin pérdida de generalidad que $c<a<b$



Si consideramos los puntos G, H, J de tangencia de BC, CA y AB con la circunferencia inscrita a ABC, y las intersecciones de GH y GJ con la altura por A, P ,Q por doble paralelismo, tenemos que PQ=A_bA_c=l.

Del triángulo APJ conocemos $AJ = \frac{c+b-a}{2}$, ∠JAP=90º-β , $\angle AJP = 90º + \frac{\beta}{2}$, $\angle JPA$=$\frac{\beta}{2}$

Luego es $\frac{AP}{AJ} = \frac{\sin\angle 90º+\frac{\beta}{2},}{\sin\angle\frac{\beta}{2}} \rightarrow AP = \frac{c+b-a}{2}\ cotg\angle\frac{\beta}{2}$=$\frac{c+b-a}{2}\ \frac{\frac{a+c-b}{2}}{r}$,

En el triángulo AHQ, tenemos:

$AH = \frac{c+b-a}{2}$, ∠HAQ=90º-γ , $\angle AQH = 90º + \frac{\gamma}{2}$, $\angle HQA$=$\frac{\gamma}{2}$

Luego es $\frac{AQ}{AH} = \frac{\sin\angle 90º+\frac{\gamma}{2},}{\sin\angle\frac{\gamma}{2}} \rightarrow AQ = \frac{c+b-a}{2}\ cotg\angle\frac{\gamma}{2}$=$\frac{c+b-a}{2}\ \frac{\frac{a+b-c}{2}}{r}$, De forma que podemos obtener PQ:

l=A_bA_c=PQ=AQ-AP=$\frac{c+b-a}{2}\,\frac{\frac{a+b-c}{2}}{r}-\frac{c+b-a}{2}\,\frac{\frac{a+c-b}{2}}{r}=\frac{c+b-a}{2}\left(\frac{b-c}{r}\right)=\frac{b^2-c^2-ab+ac}{2r}$

Por circularidad de las expresiones y de la estructura geométrica, podemos obtener:

m=B_cB_a= RS=$\frac{a^2-c^2-ba+bc}{2r}$

n=C_aC_b=TU=$\frac{b^2-a^2-cb+ca}{2r}$

De donde, c.q.d., es l=m+n.

Ricardo Barroso Campos.

Jubilado. Sevilla. España