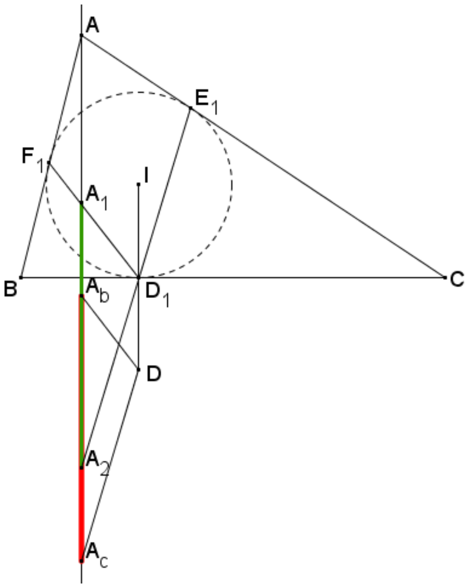
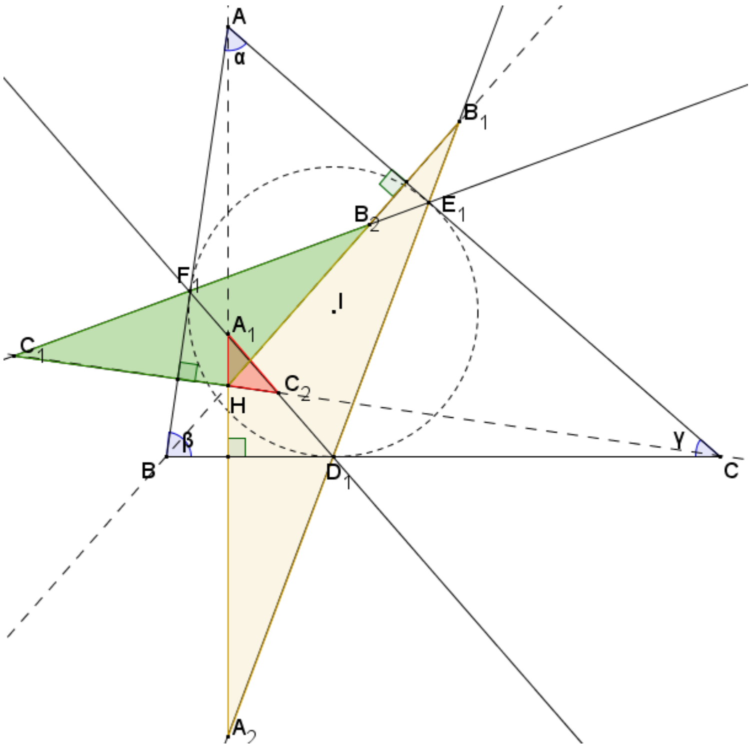
Problema 945
Dado un triángulo ABC de incentro I, sean D,E,F las reflexiones de I en los lados BC, CA, AB, respectivamente. Las intersecciones de la altura por A con DF, DE son Ab y Ac, respectivamente. Las intersecciones de la altura por B con ED, EF son Bc y Ba, respectivamente. Las intersecciones de la altura por C con FE, FD son Ca y Cb, respectivamente. Si l, m, n son las longitudes de los segmentos AbAc, BcBa, CaCb, demostrar que una de esta longitudes es la suma de las otras dos.
Esta propiedad también se tiene cuando se sustituye el incentro por cada exincentro.
Montesdeoca, A. (2020): Comunicación personal.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



Remarque liminaire
Le problème est posé avec le triangle DEF dont les sommets sont les points symétriques du centre I du cercle inscrit par rapport aux côtés du triangle ABC.
Il peut être résolu de la même manière en considérant le triangle pédal $D_1E_1F_1$ du centre I par rapport au triangle ABC.
Soit A_bA_c le segment obtenu par l'intersection de la hauteur issue de A avec les deux droites issues de D et passant par les points E et F.
Soit A_1A_2 le segment correspondant dont les extrémités sont à l'intersection de la hauteur issue de A et des droites D_1E_1 et D_1F_1.
Le segment A_1A_2 se déduit du segment A_bA_c par la translation DD_1 et leurs longueurs sont identiques.

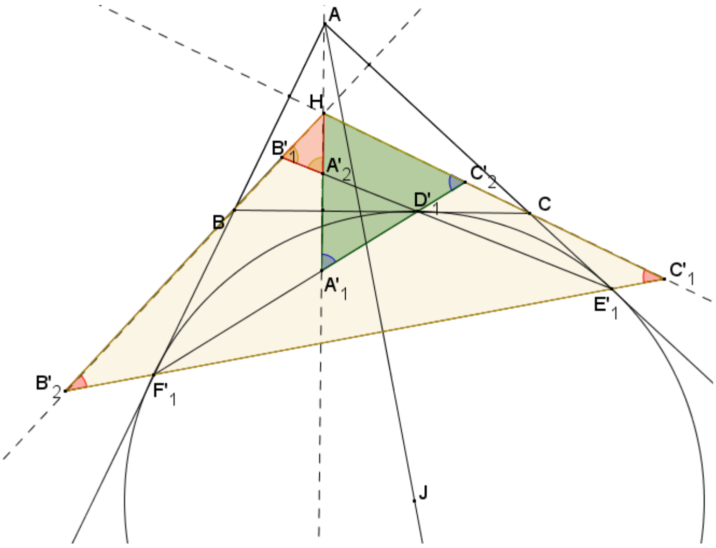
Triangle pédal $D_1E_1F_1$ du centre I du cercle inscrit



H est l'orthocentre du triangle ABC.
Les intersections des droites AH, BH et CH avec respectivement les droites D_1F_1 et D_1E_1, E_1D_1 et E_1F_1, F_1E_1 et F_1D_1 sont les points A_1 et A_2, puis les points B_1 et B_2 et enfin les points C_1 et C_2.
On pose $\angle BAC = \alpha$, $\angle CBA = \beta$ et $\angle ACB = \gamma$
Lemme : les triangles HA_1C_2, HB_1A_2 et HC_1B_2 sont isocèles.
Démonstration :Le triangle BD_1F_1 étant isocèle, on a $\angle BD_1F_1 = \angle BF_1D_1 = \pi/2 - \beta/2$.
D'où $\angle HA_1C_2 = \angle HC_2A_1 = \pi/2 - (\pi/2 - \beta/2) = \beta/2$.
De la même manière $\angle HB_1A_2 = \angle HA_2B_1 = \gamma/2$ et $\angle HC_1B_2 = \angle HB_2C_1 = \alpha/2$.
On en déduit d'après la figure ci-contre dans laquelle H est à l'intérieur des segments A_1A_2 et C_1C_2 et extérieur au segment B_1B_2:
$A_1A_2 = A_1H + HA_2 = HC_2 + HB_1$
$B_1B_2 = HB_1 - HB_2 = HB_1 - HC_1$
$C_1C_2 = HC_1 + HC_2$
D'où $A_1A_2 = B_1B_2 + C_1C_2$. C.q.f.d.

Nota : le point H est toujours intérieur à deux segments et extérieur au troisième de la famille des segments A_1A_2,B_1B_2 et C_1C_2 . Il est extérieur au segment porté par la hauteur perpendiculaire au plus grand côté du triangle. De cette manière on peut avoir les relations $B_1B_2 = A_1A_2 + C_1C_2$. et $C_1C_2 = A_1A_2 + B_1B_2$.

Triangle pédal $D'_1E'_1F'_1$ du centre J du cercle exinscrit dans le secteur de l'angle en A



Les intersections des droites AH, BH et CH avec respectivement les droites $D'_1F'_1$ et $D'_1E'_1$, $E'_1D'_1$ et $E'_1F'_1$, $F'_1E'_1$ et $F'_1D'_1$ sont les points A'_1 et A'_2, puis les points B'_1 et B'_2 et enfin les points C'_1 et C'_2.

Lemme : les triangles $HA'_1C'_2$, $HB'_1A'_2$ et $HC'_1B'_2$ sont isocèles.

Comme dans le cas du cercle inscrit on vérifie aisément que $\angle HB_1A_2 = \angle HA_2B_1 = \pi/2 - \gamma/2$,

$\angle HC_1B_2 = \angle HB_2C_1 = \pi/2 - \alpha/2$,

$\angle HA_1C_2 = \angle HC_2A_1 = \pi/2 - \beta/2$.

D'où $B'_1B'_2 = A'_1A'_2 + C'_1C'_2$ (voir figure ci-contre).

Selon les dimensions respectives des côtés a,b,c du triangle ABC, on peut avoir les deux autres relations $A'_1A'_2 = B'_1B'_2 + C'_1C'_2$ et $C'_1C'_2 = A'_1A'_2 + B'_1B'_2$.