Pr. Cabri 946

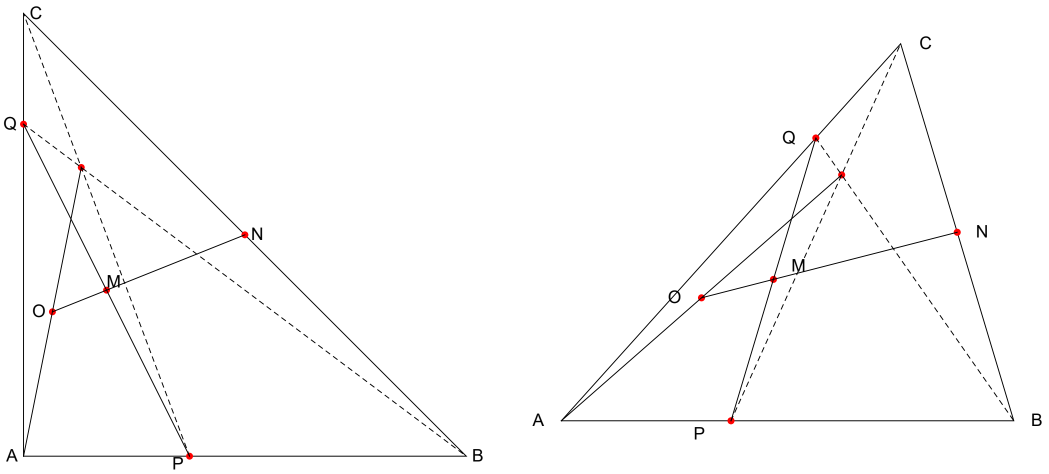
Enunciado

En un triángulo ABC se ubica el punto Q en AC y el punto P en AB. La recta que pasa por los puntos medios N y M de CB y PQ, respectivamente, interseca al segmento que une al vértice A con el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero CQPB en O , entonces la razón de las áreas de las regiones que determina PQ en el triángulo son entre sí como la razón de longitudes que determina PQ en ON.
Donire, M. F. (2020): Comunicación personal.

Propuesto por Milton Favio Donaire Peña.

Solución

de César Beade Franco



Las transformaciones afines conservan las razones entre distancias y también entre áreas y como desde un punto de vista afín "todos los triángulos son iguales", nos basta resolver el problema para un triángulo cualquiera, por ejemplo con vértices A(0,0), B(2,0) y C(0,2) y para los puntos P(2p,0) y Q(0,2q).
Los otros puntos son en este caso N(1,1), M(p,q), $\left(\frac{2\,p\,(-1+q)}{-1+p\,q},\ \frac{2\,(-1+p)\,q}{-1+p\,q}\right)$ el corte de las diagonales de CQPB y O$\left(\frac{p\,(-1+q)}{-1+p\,q},\ \frac{(-1+p)\,q}{-1+p\,q}\right)$.
Resulta que $\frac{MN}{OM} = \frac{1-p\,q}{p\,q} = \frac{(PQCB)}{(PAQ)}$.