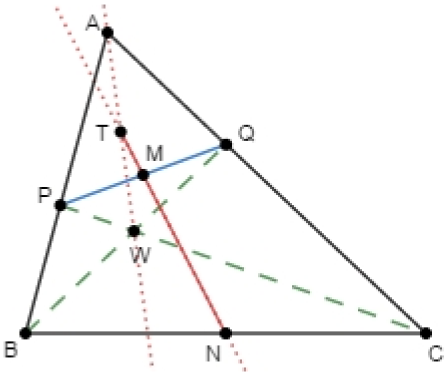
<u>Ejercicio 3116.</u> Dado un triángulo ABC, se consideran dos puntos P y Q situados en los segmentos AB y AC, respectivamente. La recta que pasa por los puntos medios M y N de lo segmentos PQ y BC, respectivamente, interseca a la recta que pasa por el punto A y por el punto W de intersección entre las diagonales del cuadrilátero $BCQP$ en un punto T. Probar que la razón entre las áreas de las dos regiones que determina el segmento PQ en el triángulo ABC coincide con la razón entre las longitudes de los dos segmentos que determina la recta PQ en el segmento WN.



(Triángulos Cabri nº 946)

<u>Solución:</u>

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, si:

$$\begin{cases} P=(p:1-p:0) \\ Q=(q:0:1-q) \end{cases} \begin{pmatrix} 0<p<1 \\ 0<q<1 \end{pmatrix}$$

entonces:

$$\begin{cases} M=(p+q:1-p:1-q) \\ N=(0:1:1) \end{cases}$$

y:

$$\begin{cases} BQ\equiv 0=(1-q)x-qz \\ CP\equiv 0=(1-p)x-py \end{cases} \Rightarrow W=(pq:q(1-p):p(1-q))$$

Además, como:

$$\begin{cases} MN\equiv 0=(p-q)x+(p+q)y-(p+q)z \\ AW\equiv 0=p(1-q)y-q(1-p)z \end{cases} \Rightarrow T=(p+q:q(1-p):p(1-q))$$

entonces:

$$\begin{cases} TM^2=\dfrac{(1-p)^2(1-q)^2(c^2p^2-a^2pq+b^2pq+c^2pq+b^2q^2)}{4(p+q-pq)^2} \\ MN^2=\dfrac{c^2p^2-a^2pq+b^2pq+c^2pq+b^2q^2}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{TM^2}{MN^2}=\frac{(1-p)^2(1-q)^2}{(p+q-pq)^2} \Rightarrow \frac{TM}{MN}=\frac{(1-p)(1-q)}{p+q-pq}$$

Finalmente, como:

$$\begin{cases} \dfrac{(APQ)}{(ABC)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & 1-p & 0 \\ q & 0 & 1-q \end{vmatrix} = (1-p)(1-q) \\ \dfrac{(BQP)}{(ABC)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ q & 0 & 1-q \\ p & 1-p & 0 \end{vmatrix} = p(1-q) \\ \dfrac{(BCQ)}{(ABC)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ q & 0 & 1-q \end{vmatrix} = q \end{cases}$$

entonces:

$$\frac{(APQ)}{(BCQP)} = \frac{(APQ)}{(BQP)+(BCQ)} = \frac{(1-p)(1-q)}{p(1-q)+q} = \frac{(1-p)(1-q)}{p+q-pq} = \frac{TM}{MN}$$