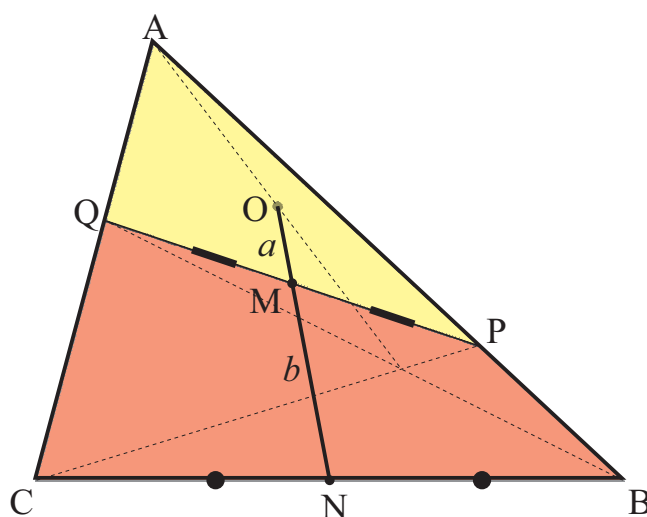


Problema 946 de Triángulos Cabri

Milton Favio Donaire Peña

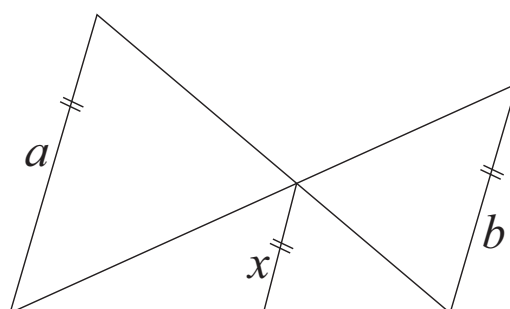
10 de junio de 2020

Problema 946. En un triángulo ABC se ubica el punto Q en $\overline{AC}$ y el punto P en $\overline{AB}$. La recta que pasa por los puntos medios N y M de $\overline{CB}$ y $\overline{PQ}$, respectivamente, interseca al segmento que une al vértice A con el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero $CQPB$ en O , entonces la razón de las áreas de las regiones que determina $\overline{PQ}$ en el triángulo son entre sí como la razón de longitudes que determina $\overline{PQ}$ en $\overline{ON}$.



$$\frac{[QAP]}{[CQPB]} = \frac{a}{b}$$

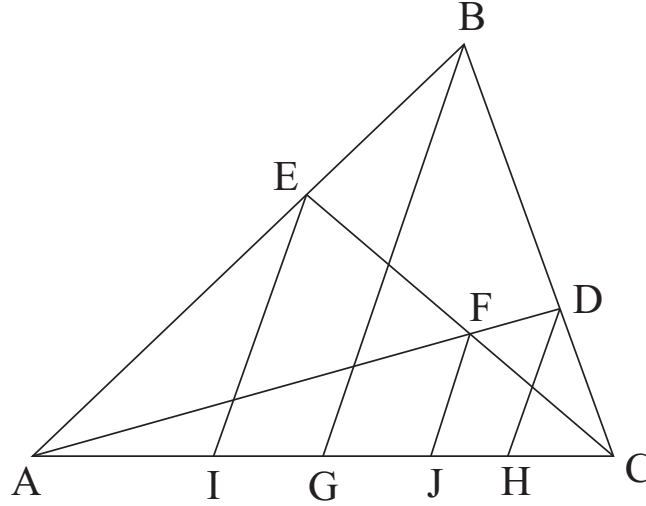
Para abordar este problema haremos uso de algunos resultados previos que nos permitirán darle una solución puramente sintética al problema, primero usaremos la generalización del siguiente resultado:



$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Teorema 1 *Crossed Ladders* [1] Sean los puntos A-I-G-J-H-C en ese orden y ubicados en una línea recta, B es un punto exterior a la recta AC , E es un punto de $\overline{AB}$, D es un punto de $\overline{BC}$ y $\overline{AD} \cap \overline{CE} = \{F\}$, bajo la condición que $\overline{EI} \parallel \overline{BG} \parallel \overline{FJ} \parallel \overline{DH}$, se cumple:

$$\frac{1}{EI} + \frac{1}{DH} = \frac{1}{BG} + \frac{1}{FJ}$$



■ Prueba

$\triangle ABG$ ($\overline{BG} \parallel \overline{EI}$):

$$\frac{EB}{BA} = \frac{BG - EI}{BG}$$

$\triangle ADH$ ($\overline{DH} \parallel \overline{FJ}$):

$$\frac{AD}{DF} = \frac{DH}{DH - FJ}$$

$\triangle EIC$ ($\overline{EI} \parallel \overline{FJ}$):

$$\frac{FC}{CE} = \frac{FJ}{EI}$$

$\triangle AEF$ (T.Menelao):

$$\frac{EB}{BA} \cdot \frac{AD}{DF} \cdot \frac{FC}{CE} = 1$$

Reemplazando en esta última expresión, los resultados antes obtenidos, tendremos:

$$\frac{BG - EI}{BG} \cdot \frac{DH}{DH - FJ} \cdot \frac{FJ}{EI} = 1$$

Operando, se obtiene:

$$BG \cdot DH \cdot FJ - EI \cdot DH \cdot FJ = BG \cdot DH \cdot EI - BG \cdot FJ \cdot EI$$

$$BG \cdot FJ(DH + EI) = DH \cdot EI(BG + FJ)$$

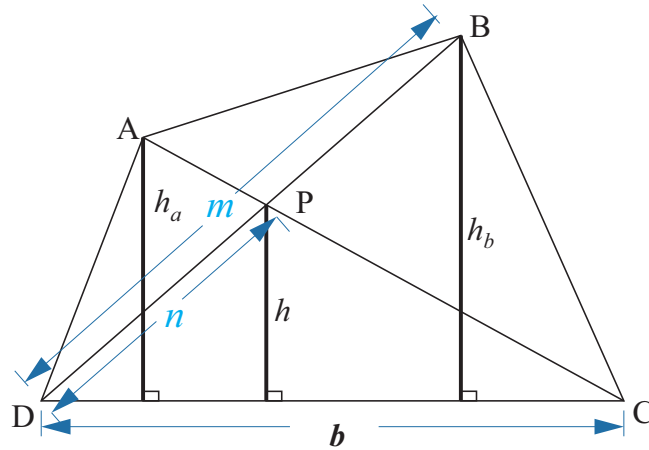
De donde finalmente se deduce:

$$\frac{1}{EI} + \frac{1}{DH} = \frac{1}{BG} + \frac{1}{FJ}$$

□

Teorema 2 *Milton Donaire* [2] El área de una región cuadrangular es igual al producto de la longitud de uno de sus lados con las distancias a él desde los vértices opuestos, y todo esto dividido entre el doble de la distancia del punto de intersección de las diagonales hacia el mismo lado.

■ Prueba



$$\frac{[ABCD]}{[ACD]} = \frac{m}{n} = \frac{h_b}{h}$$

Pero es bastante conocido que:

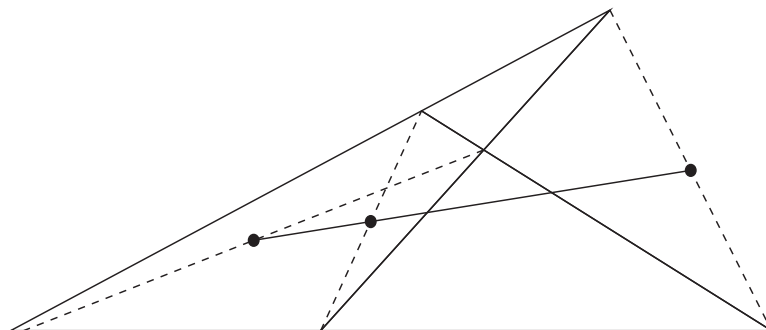
$$[ADC] = (b \cdot h_a)/2$$

Reemplazando el resultado anteriormente obtenido:

$$[ABCD] = \frac{b}{2} \left(\frac{h_a h_b}{h} \right)$$

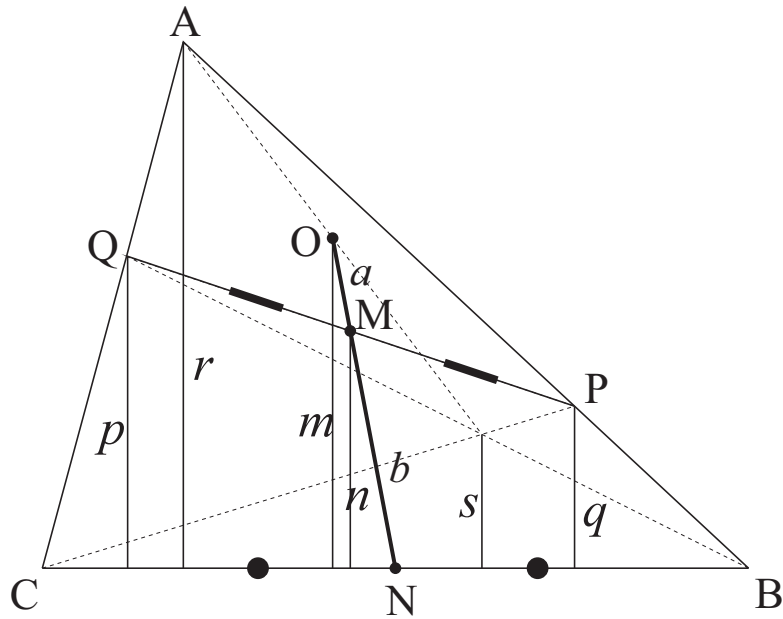
□

Teorema 3 *Recta de Newton* [3, pág. 198] En todo cuadrilátero completo los puntos medios de sus diagonales están alineados.



El teorema anterior que define a la recta de Newton, es bastante conocido, por ello no expondremos acá su demostración. A continuación trabajaremos ya en la solución del problema.

Solución al problema 946



Como m y n son bases medias de trapecios en la figura, entonces se tiene que $m = (r + s)/2$ y $n = (p + q)/2$, de allí es fácil conseguir:

$$\frac{a}{b} = \frac{m-n}{n} = \frac{r+s-(p+q)}{p+q}$$

Además del segundo teorema tenemos que:

$$[CQPB] = \frac{BC}{2}(\frac{pq}{s})$$

Ahora ya podemos conseguir el área de la región QAP:

$$[QAP] = [ABC] - [CQPB] = \frac{BC}{2}(r) - \frac{BC}{2}\left(\frac{pq}{s}\right) = \frac{BC}{2}\left(\frac{rs - pq}{s}\right)$$

Ahora le damos forma a lo pedido:

$$\frac{[QAP]}{[CQPB]} = \frac{rs - pq}{pq}$$

Ahora hagamos uso del primer teorema:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{s}$$

de allí:

$$\frac{rs}{pq} = \frac{r+s}{p+q}$$

de donde podemos obtener

$$\frac{[QAP]}{[CQPB]} = \frac{rs - pq}{pq} = \frac{r + s - (p + q)}{p + q} = \frac{a}{b}$$

☐

Referencias

- [1] WEISSTEIN, ERIC W. *Crossed Ladders Theorem.* "From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <https://mathworld.wolfram.com/CrossedLaddersTheorem.html>
- [2] GEOMETRY PROBLEMS FROM IMOS, <https://imogeometry.blogspot.com/p/new-proofs-of-known-geometry-theorems.html>
- [3] DONAIRE, MILTON *"Formas y Números - La geometría en las olimpiadas de matemática"*, Fondo Editorial Universidad de Ciencias y Humanidades - Lima, Perú 2010.