

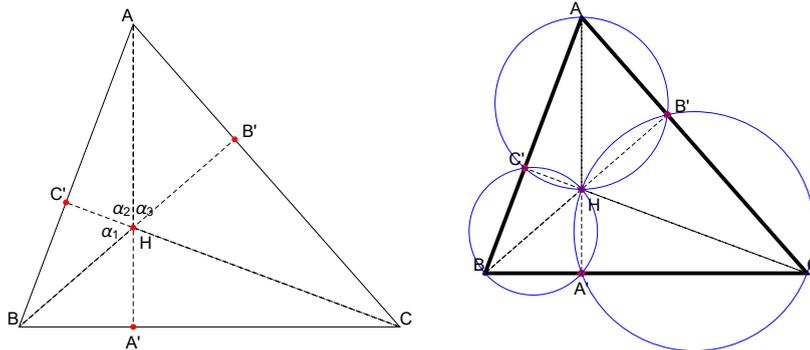
Orticaria

por César Beade Franco

I. Las alturas de un triángulo convergen en el ortocentro. Podemos dar una demostración usando el teorema de Ceva (su recíproco). Según el dibujo vemos que

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = \frac{c \cos B}{b \cos C} \cdot \frac{a \cos C}{c \cos A} \cdot \frac{b \cos A}{a \cos B} = 1$$

Dibujo 1

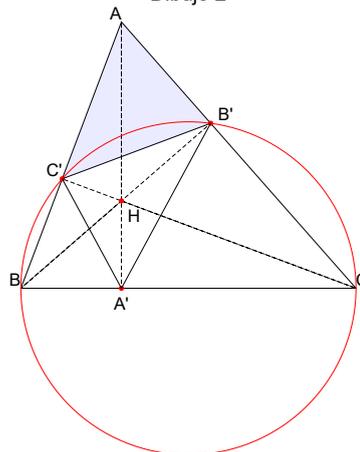


II. Observamos que el cuadrilátero $AB'HC'$ es cíclico. Eso es así pues los ángulos opuestos B' y C' son rectos (y suman 180°). Por el mismo motivo son cíclicos $BA'HC'$ y $CB'HA'$.

III. Fijémonos en los 6 ángulos alrededor de H . Teniendo en cuenta los cuadriláteros concíclicos anteriores deducimos que

$\alpha_3 + \alpha_1 = C + A$ (suplementario de B , $\alpha_2 + \alpha_3 = B + C$ y $\alpha_1 + \alpha_2 = A + B$, de lo que se deduce que $A = \alpha_1$, $B = \alpha_2$ y $C = \alpha_3$).

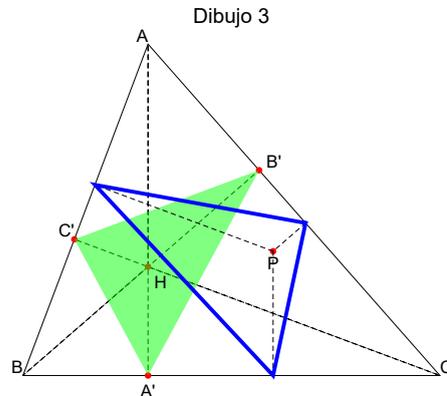
Dibujo 2



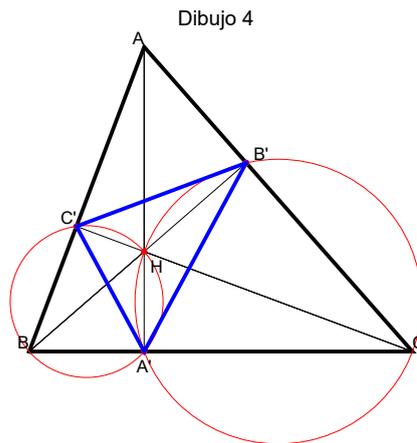
IV. En el dibujo anterior vemos otro cuadrilátero $BCB'C'$ concíclico. Es así debido a los ángulos rectos $BB'C$ y $CC'B$. De aquí deducimos que B suplementario de $CB'C'$ lo mismo que $AB'C'$, por tanto los ángulos $AB'C'$ y B son iguales y el triángulo $AB'C'$ es semejante al ABC .

Como $ABA'B'$ y $ACA'C'$ son también concíclicos deducimos la semejanza de $A'BC'$ y $A'B'C$ con ABC .

V. Dibujemos el triángulo que une los pies de las alturas A' , B' , C' . Se obtiene el triángulo órtico que se puede considerar como un caso especial de los llamados triángulos pedales. En el siguiente dibujo vemos el triángulo órtico (verde) y otro pedal respecto a un punto P (sus vértices son las proyecciones de P sobre los lados del triángulo).



VI. En el siguiente dibujo observamos que $A'HC'B$ y $A'HB'C$ son cíclicos (demostrado en II), por lo que se cumple que los ángulos $HA'C' = HBC' = B'BC' = (1) B'CC' = B'CH = B'A'H$, así pues la altura AA' es una bisectriz del ángulo A' del triángulo órtico y lo mismo sucede para las demás alturas. Por tanto el ortocentro de un triángulo es el incentro del órtico (2).



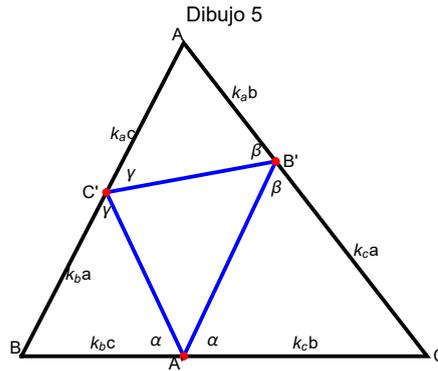
VII. De lo anterior deducimos que el órtico es el único triángulo reflectante como se aprecia en el dibujo 4.

También que los tres triángulos que lo rodean son semejantes al ABC , según vimos en el apartado IV. Otra comprobación. Según vemos en el dibujo siguiente, los ángulos α , β y γ verifican que $\beta + \gamma = B + C$, $\gamma + \alpha = C + A$, $\alpha + \beta = A + B$, de lo que deducimos que $\alpha = A$, $\beta = B$ y $\gamma = C$.

Para calcular las razones de semejanza resolvemos el sistema ecuaciones

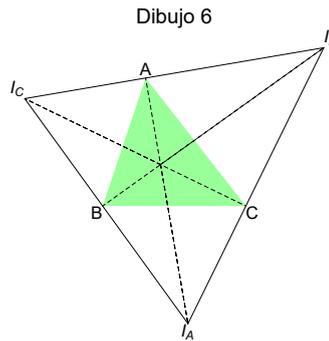
$$k_b c + k_c b = a, \quad k_c a + k_a c = b \quad \text{y} \quad k_a b + k_b a = c,$$

$$\text{con soluciones } k_a = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = \cos A, \quad k_b = \cos B \quad \text{y} \quad k_c = \cos C.$$



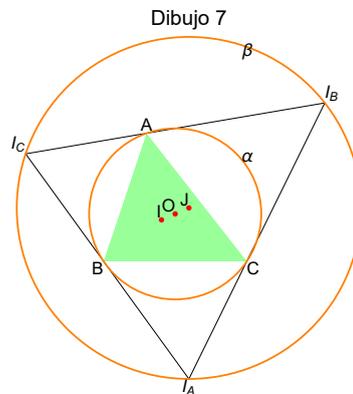
Si \$S\$ es el área del triángulo \$ABC\$, las de éstos suman \$S(\text{Cos}^2A + \text{Cos}^2B + \text{Cos}^2C)\$. Y si \$S'\$ es el área del órtico se cumple que $\frac{S'}{S} = 1 - (\text{Cos}^2A + \text{Cos}^2B + \text{Cos}^2C)$ (3).

VIII. Observamos en el dibujo 6 el \$\Delta ABC\$ junto con el \$\Delta I_A I_B I_C = \Delta_I\$ cuyos vértices son los ex-incentros. Cada lado de \$\Delta_I\$ (bisectriz exterior) es perpendicular a una bisectriz interior de \$\Delta\$, que será una de sus alturas, así que el incentro \$I\$ de \$\Delta\$ es el ortocentro de \$\Delta_I\$. Podemos llamarle a \$\Delta_I\$ triángulo anti-órtico de \$\Delta\$. Otra forma de deducir que las alturas de un triángulo, al ser las bisectrices interiores de su órtico concurren en un punto.



Como \$\Delta\$ es el órtico de \$\Delta_I\$, su circuncírculo \$\alpha\$ es la C9P de \$\Delta_I\$, cuyo circuncírculo \$\beta\$ tendrá doble radio que el de \$\alpha\$.

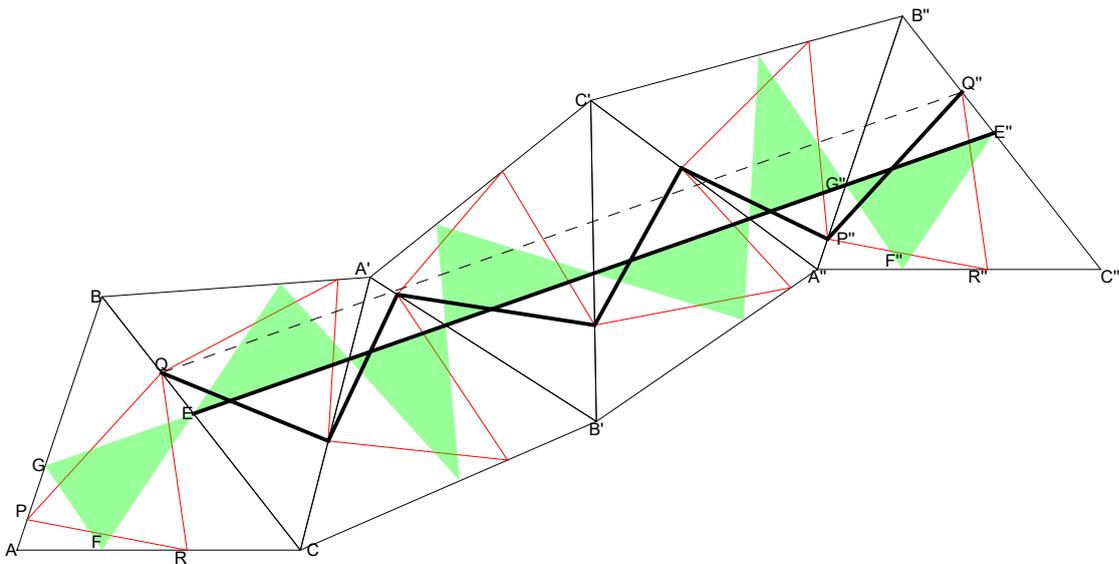
Si \$O\$ es el centro de \$\alpha\$ y \$J\$ el de \$\beta\$ y como \$I\$ es el ortocentro de \$\Delta_I\$, \$I, O, J\$ están alineados al estar en la recta de Euler de \$\Delta_I\$, verificándose \$OI=OJ\$.



IX. En un triángulo acutángulo el órtico es el triángulo inscrito de perímetro mínimo. A esta propiedad se le llama a veces "Teorema de Fagnano". La siguiente demostración se debe a Schwartz (4).

Observemos el siguiente dibujo

Dibujo 8



Reflejamos el triángulo ABC en el lado BC obteniendo A'BC y a su vez éste se refleja en CA', el resultante en A'B'C', después en B'C', luego en C'A'' y finalmente en A''B'', en total 6 reflexiones que nos dan el triángulo A''B''C'' que no es más que el ABC trasladado paralelamente, según veremos.

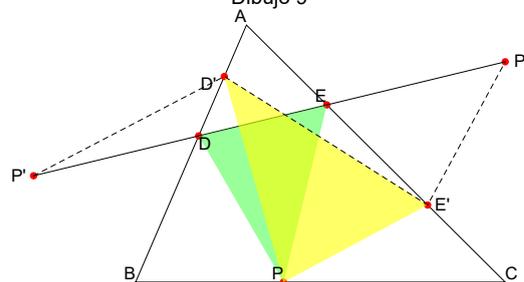
Centremonos en las dos primeras reflexiones.

El triángulo A'B'C podría haberse obtenido por un giro de centro C y ángulo $2C$. De la misma forma el movimiento de la 3ª a la 5ª posición pudo haberse efectuado con otro giro centrado en B de amplitud $2B$ y el paso a la 7ª con otro centrado en A y de ángulo $2A$. Todos ellos en sentido horario. En total en triángulo habrá efectuado una rotación completa pues $2A+2B+2C=360^\circ$. De ahí la traslación paralela.

Como las alturas son las bisectrices del triángulo órtico, tras las reflexiones anteriores, estarán situados por orden en la línea EE'' de longitud el doble de su perímetro. En cambio los lados de otro triángulo inscrito como el PQR formarán una línea quebrada (de Q a Q'') de longitud mayor pues $EE''=QQ''$.

X. Esta otra demostración, que la encontró L. Fejér siendo estudiante, reduce el número de reflexiones.

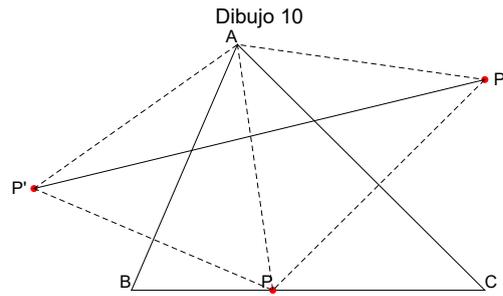
Dibujo 9



Fijado un punto D sobre un lado (lado BC en el dibujo), nos preguntamos como construir un triángulo inscrito en el ABC que pase por P y tenga perímetro mínimo.

Calculamos los simétricos P' y P'' de P respecto a los lados AB y AC. El perímetro de PDE, siendo D y E los cortes del segmento P'P'' con los lados AB y AC, es precisamente P'P''. Cualquier otro triángulo PD'E' inscrito, tiene un perímetro mayor pues la poligonal P'D'E'P'' es mayor que el segmento P'P''.

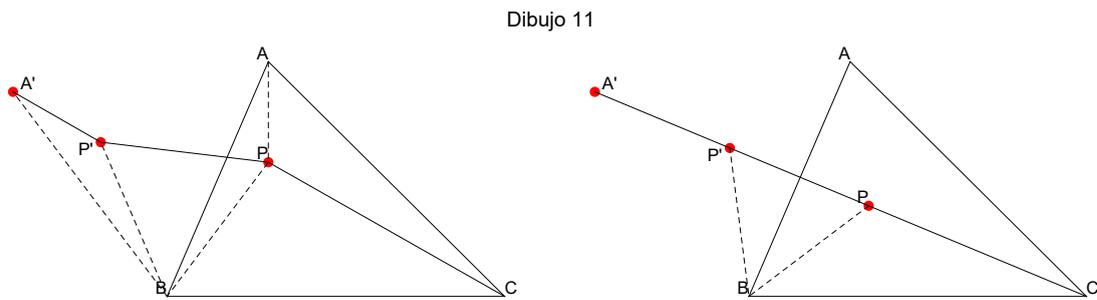
Veamos ahora donde hemos de situar P para que P'P'' tenga longitud mínima.



Por simetría se cumple que $AP' = AP = AP''$, lo que implica que el triángulo $AP'P''$ es isósceles. Asimismo es fácil observar que el ángulo $P'AP'' = 2BAC$, independiente, por tanto de la posición de P. Por tanto el segmento $P'P''$ será mínimo cuando lo sea AP y esto sucede si P es el pie de la altura desde A.

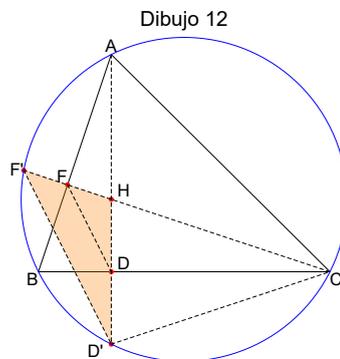
Extendiendo este razonamiento a los demás lados concluimos que el triángulo de perímetro mínimo es el que tiene como vértices los pies de las alturas, es decir, el órtico.

XI. Hay un teorema recíproco al del triángulo órtico. En todo triángulo con ángulos menores de 120° hay un único punto cuya suma de distancias a los vértices es mínima (5). La siguiente demostración es de Bückner.



Giramos el triángulo 60° alrededor de B obteniendo $A'BP'$ (dibujo 11 izquierdo). Así que $A'P' = AP$ y $BP' = BP$, por tanto la longitud de la poligonal $A'P'PC$ es igual $PA + PB + PC$. Como A' no depende de P la distancia es mínima si P está sobre la línea $A'C$. Como además el ángulo BPP' mide 60° (BPP' es equilátero), el punto P queda completamente determinado (6).

XII. Consideremos ahora la circunferencia circunscrita de ABC y su relación con H.

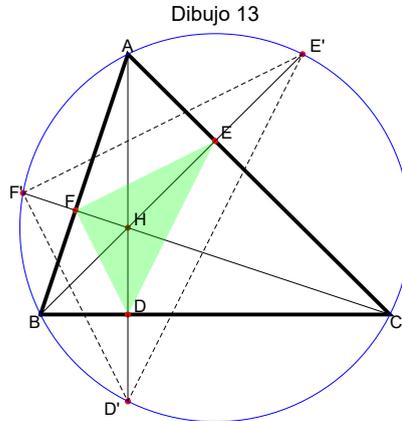


Sean D el pie de la altura sobre BC y D' la intersección de esta altura con la circunferencia circunscrita.

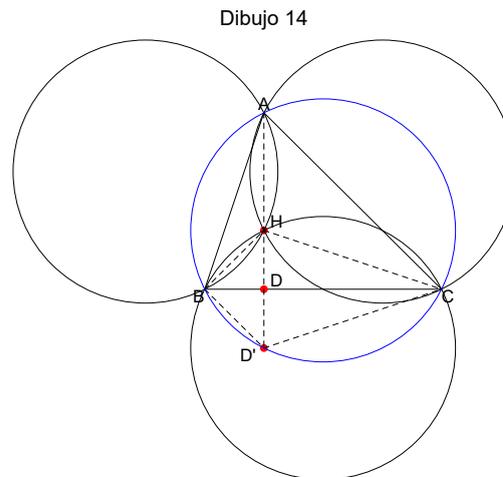
Siguiendo el dibujo 12 vemos que los ángulos $BAD' = FCD$ (ambos son complementarios de B) y también que $BAD' = BCD'$ (abarcan el mismo arco), así pues $HCD = DCD'$, es decir

el lado BC es la bisectriz de HCD' y D es el punto medio de HD' .

Además como $D'D=DH$ y $F'F=FH$, por el teorema de Tales aplicado al triángulo $HD'F'$ deducimos que $D'F'$ es paralelo a DF y doble longitud. Extendiendo este resultado a las demás alturas demostramos que el triángulo $D'E'F'$ es tiene lados paralelos al órtico de longitud doble.



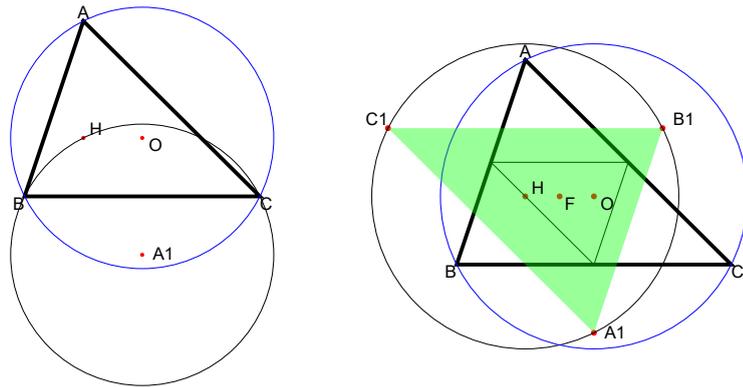
Y hay más. Del dibujo 12 deducimos que las circunferencias circunscritas a los triángulos BCD' y CBH son iguales (mismo radio) al serlo esos triángulos dado que H y D' son simétricos respecto a BC. Y extendiendo esta observación a las otras alturas deducimos que las circunferencias circunscritas a los triángulos ABH , BCH y CAH tienen el mismo radio que la circunscrita a ABC .



Y ahora consideremos el triángulo $A_1B_1C_1$ cuyos vértices son los circuncentros de las circunferencias anteriores.

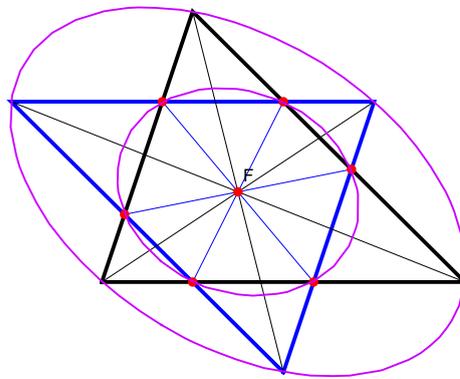
Como las circunferencias circunscritas a ABC y HBC son simétricas respecto al lado BC lo serán también sus circuncentros O y A_1 . Y lo mismo para B_1 y C_1 . Así pues $A_1B_1C_1$ es un triángulo homotético al medial de ABC . Como este es homotético al ABC con razón $-\frac{1}{2}$, $A_1B_1C_1$ lo será a éste con razón -1 . Las rectas que unen vértices homólogos pasan todas por el centro de homotecia, que será el punto medio de dos puntos homólogos cualesquiera. Resulta que el circuncentro de $A_1B_1C_1$ es precisamente H , homólogo, por tanto, de O (circuncentro de ABC). Así pues el centro de homotecia y punto de concurrencia buscado es precisamente F , el centro de la circunferencia de los 9 puntos. Punto en el que concurren las rectas AA_1 , BB_1 y CC_1 .

Dibujo 15



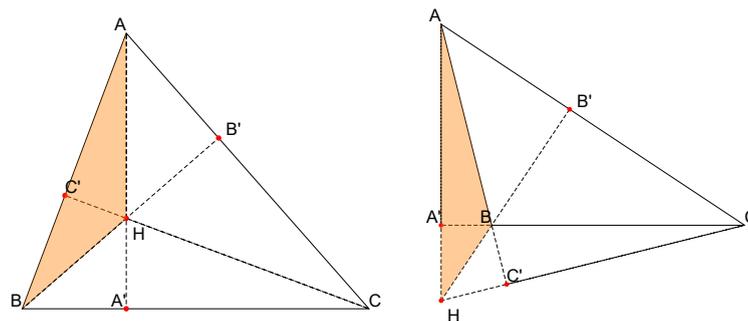
Por los 6 vértices de estos dos triángulo pasa una cónica y también por sus 6 puntos de corte, ambas centradas en F (7).

Dibujo 16



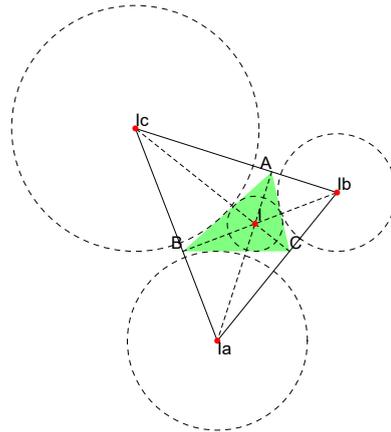
XIII. Regresamos al triángulo ABC y a su ortocentro H. Resulta que el ortocentro de un triángulo con vértices 3 de esos puntos tiene como ortocentro el otro. Por ejemplo el ortocentro de ABH es C. Lo que parece visualmente evidente.

Dibujo 17



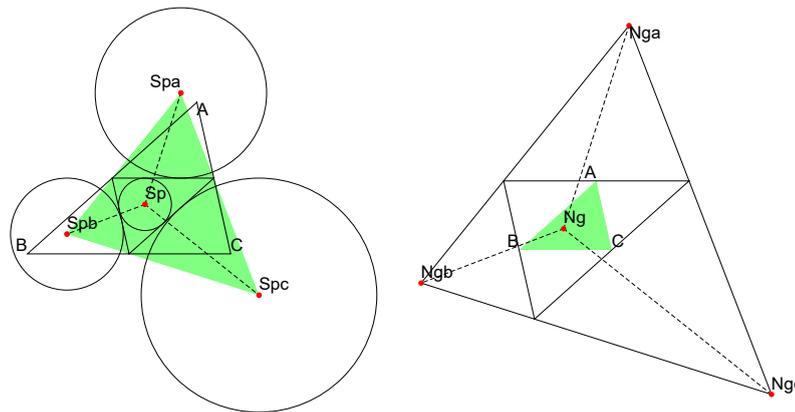
Estos 4 puntos forman un sistema ortogonal (u ortocéntrico). Además, según lo visto en VI, H es el incentro del órtico y los vértices A, B, C, son los otros incentros. Es decir, dados 4 puntos que forman un sistema ortogonal, existe un triángulo del cual esos puntos son incentros. Este es el órtico de cualquier triángulo de vértices 3 de esos 4 puntos, pues todos tienen el mismo órtico.

Dibujo 18



Vamos a examinar otros dos sistemas ortocéntricos. Son los formados por los 4 puntos de Nagel y los 4 de Spieker. Son, respectivamente, los incentros del triángulo antimedial y los del medial, por lo que han de constituir sistemas ortocéntricos según lo visto (8).

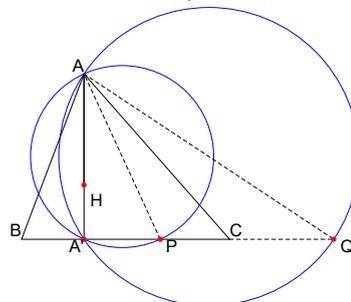
Dibujo 19



Recíprocamente, si tenemos un sistema ortocéntrico, sus puntos serán los puntos de Spieker del antimedial de su órtico y los de Nagel del medial del mismo órtico, como vemos en el dibujo 19 (9).

XIV. (10) Consideremos ahora circunferencias con una ceviana como diámetro.

Dibujo 20

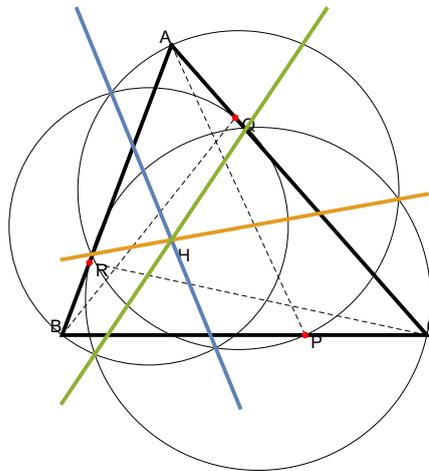


El dibujo deja claro que toda circunferencia de diámetro AP con P situado sobre BC pasa por A' proyección de H sobre BC, por lo que la altura AA' es el eje radical de todas ellas.

Esto puede extenderse a los otros vértices y lados deduciendo que el eje radical de

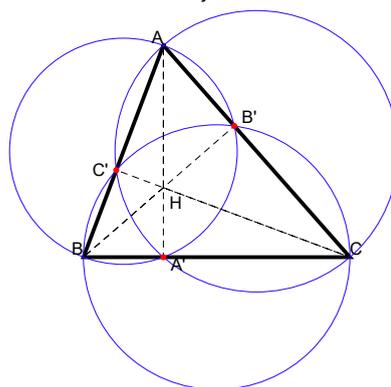
cualesquiera 2 circunferencias que tengan cevianas de un triángulo como diámetro pasa por su ortocentro. Y ésta es por tanto el centro radical de 3 circunferencias en esas condiciones.

Dibujo 21



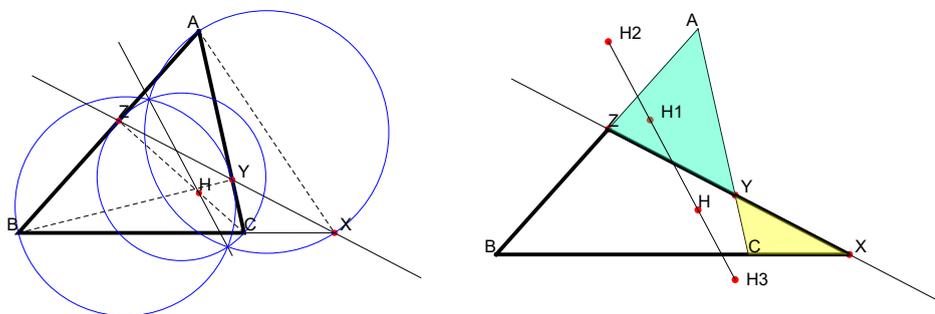
Considerando los lados como cevianas, resulta que los ejes radicales de las tres circunferencia que las tienen como diámetros, tomadas 2 a 2, son las alturas que han de converger, por tanto, en un punto, el centro radical, ortocentro en este caso.

Dibujo 22



XV. Otra interesante propiedad que involucra a cevianas no concurrentes.

Dibujo 23



Una recta corta a los lados (o sus prolongaciones) del triángulo ABC en los puntos X, Y, Z. Como AX, BY y CZ son cevianas las circunferencias que los tienen como diámetros son coaxiales y su eje radical pasa por H.

Claro que también podemos decir que X, B, C son puntos alineados del triángulo AYZ por lo que el eje radical de las circunferencia anteriores ha de pasar por H1, ortocentro

de ese triángulo. Y de forma semejante concluimos que a de pasar por H_2 y H_3 , ortocentros de BXZ y CXY . Es decir, los 4 ortocentros están alineados.

Notas

- (1) Conciclidad de $BCB'C'$.
- (2) Un exincentro si el triángulo es obtusángulo.
- (3) Se puede ver el problema 260 de la Gaceta (V.17, nº3).
- (4) Ver para esta demostración y la siguiente H.Rademacher y O. Toeplitz, *Números y figuras*, Cap.5 y 6.
También la demostración de Schwartz aparece en Coxeter y Greitzer, *Retorno a la Geometría*, pgs. 88-89.
- (5) Para los otros triángulos dicho punto es el vértice correspondiente al ángulo obtuso.
- (6) Se le llama punto de Torricelli o también primer punto de Fermat.
- (7) Esto siempre ocurre en triángulos de lados paralelos. Se puede ver el problema 742 de "TriángulosCabri".
- (8) Los puntos de Spieker son los 4 centros de las circunferencias de Monge de los 4 incírculos tomados de 3 en 3. Los de Nagel se pueden también caracterizar como los transformados isotómicos de los de Gergonne.
- (9) Ver problema 991 de TCabri.
- (10) Para este apartado es interesante leer Coxeter y Greitzer, *Retorno a la Geometría*, pgs.36-39.