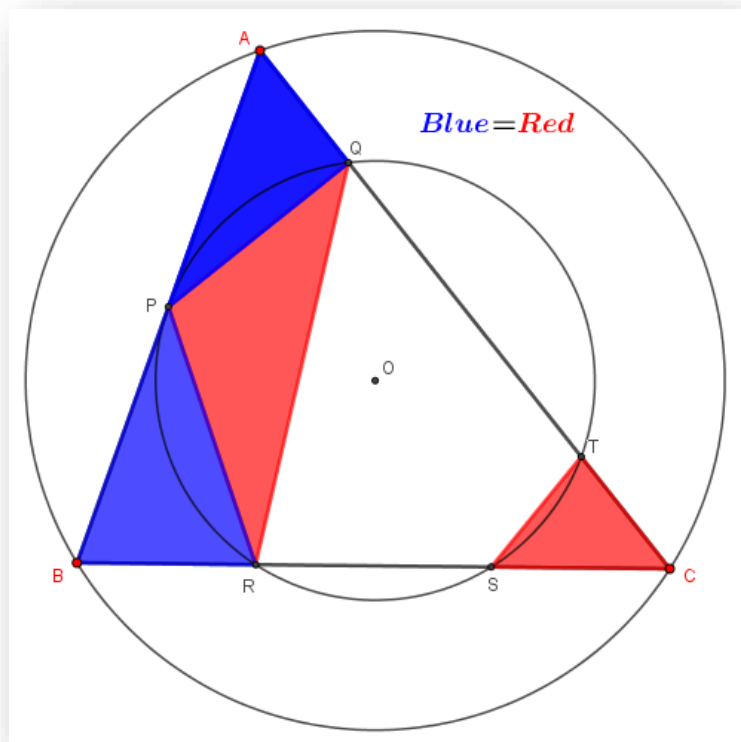


Problema 1000.

Si O es el circuncentro del $\triangle ABC$, entonces prueba que la zona Azul tiene igual área que la zona Roja.



Kalogerakis, T. (2021): Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros. Córdoba.

A la vista de la configuración realizada observamos los siguientes hechos de interés:

1.- Las circunferencias construidas son concéntricas. Para que sea posible la construcción realizada los lados $c < a$; $c < b$ ya que el lado $AB = c$ ha de ser tangente a la circunferencia interior y los otros dos $AC = b$ y $BC = a$ han de ser secantes a la misma.

2.- Sea $AQ = m$.

$$AQ \cdot AC = AP^2; m \cdot (b - m) = \left(\frac{c}{2}\right)^2 \rightarrow AQ = m = \frac{b - \sqrt{b^2 - c^2}}{2};$$

3.- De un modo similar, si $BR = n$.

$$BR = n = \frac{a - \sqrt{a^2 - c^2}}{2};$$

4.- El segmento QR es una antiparalela al segmento ST . Por tanto, tenemos la semejanza entre $\triangle CST \cong \triangle CQR$.

5.- Notamos que $AQ = CT = m$; $BR = CS = n$ por ser segmentos interceptados por las dos circunferencias concéntricas.

Vamos ahora a determinar el valor de las áreas de los siguientes triángulos:

$$[\Delta APQ] = \frac{1}{2}AQ \cdot AP \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{b - \sqrt{b^2 - c^2}}{2} \cdot \frac{a \cdot \sin C}{c} = \frac{1}{8}a(b - \sqrt{b^2 - c^2})\sin C$$

De forma análoga:

$$[\Delta BPR] = \frac{1}{8}b(a - \sqrt{a^2 - c^2})\sin C$$

Vamos ahora a determinar el área del ΔCST .

$$[\Delta CST] = \frac{1}{8}(a - \sqrt{a^2 - c^2})(b - \sqrt{b^2 - c^2})\sin C$$

Por fin, el área del ΔPQR lo podemos determinar a partir de la siguiente relación:

$$[\Delta PQR] = [\Delta ABC] - ([\Delta APQ] + [\Delta BPR]) - [\Delta QRC]$$

Por tanto, si tenemos que probar la igualdad $[\Delta APQ] + [\Delta BPR] = [\Delta PQR] + [\Delta CST]$ haremos uso de las relaciones antes obtenidas:

$$[\Delta APQ] + [\Delta BPR] = [\Delta PQR] + [\Delta CST]$$

$$[\Delta APQ] + [\Delta BPR] = [\Delta ABC] - ([\Delta APQ] + [\Delta BPR]) - [\Delta QRC] + \frac{1}{8}(a - \sqrt{a^2 - c^2})(b - \sqrt{b^2 - c^2})\sin C$$

$$2[\Delta APQ] + 2[\Delta BPR] = [\Delta ABC] - [\Delta QRC] + \frac{1}{8}(a - \sqrt{a^2 - c^2})(b - \sqrt{b^2 - c^2})\sin C$$

$$2[\Delta APQ] + 2[\Delta BPR] = \frac{1}{2}ab \sin C - \frac{1}{8}(a + \sqrt{a^2 - c^2})(b + \sqrt{b^2 - c^2})\sin C + \frac{1}{8}(a - \sqrt{a^2 - c^2})(b - \sqrt{b^2 - c^2})\sin C$$

$$2[\Delta APQ] + 2[\Delta BPR] = \frac{1}{2}ab \sin C + \frac{1}{4}(-b\sqrt{a^2 - c^2} - a\sqrt{b^2 - c^2})\sin C$$

Simplificando esta última expresión, obtenemos la identidad deseada:

$$2a(b - \sqrt{b^2 - c^2}) + 2b(a - \sqrt{a^2 - c^2}) = 4ab + 2(-b\sqrt{a^2 - c^2} - a\sqrt{b^2 - c^2})$$