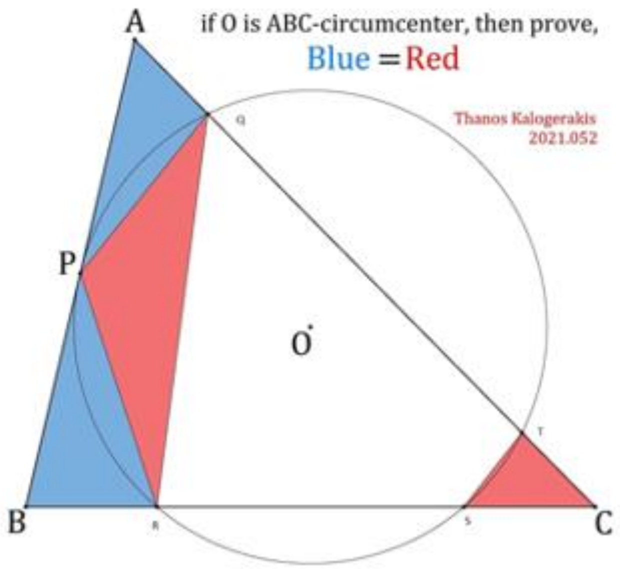
Propuesto por Thanos Kalogerakis, por invitación del director

Problema 1000



Kalogerakis, T. (2021): Comunicación personal.

Solución del director

Es b>a>c. AQ=TC. $AQ(b-AQ)=(c/2)^2\ AQ=\frac{b-\sqrt{b^2-c^2}}{2}$

S=[ABC], $S=\frac{bc\ sen\ \alpha}{2}\rightarrow sen\ \alpha=\frac{2S}{bc}$;[APQ]=$\frac{1}{2}\frac{c}{2}\ \frac{b-\sqrt{b^2-c^2}}{2}\ \frac{2S}{bc}=\frac{b-\sqrt{b^2-c^2}}{4b}\ S$ Por analogía $[BPR]=\frac{a-\sqrt{a^2-c^2}}{4a}\ S$

Así (1) $[APQ]+[PQR]=\frac{2ab-a\sqrt{b^2-c^2}-b\sqrt{a^2-c^2}}{4\,a\,b}S$

Y $[CTS]=\frac{1}{2}\frac{b-\sqrt{b^2-c^2}}{2}\ \frac{a-\sqrt{a^2-c^2}}{2}\frac{2S}{ab}=\frac{\left(b-\sqrt{b^2-c^2}\right)\left(b-\sqrt{b^2-c^2}\right)}{4\,a\,b}S$

$$[CQR]=\frac{1}{2}\frac{b+\sqrt{b^2-c^2}}{2}\ \frac{a+\sqrt{a^2-c^2}}{2}\frac{2S}{ab}=\frac{\left(b+\sqrt{b^2-c^2}\right)\left(a+\sqrt{a^2-c^2}\right)}{4\,a\,b}S$$

Luego tenemos $[PQR]=S-[APQ]-[BPR]-[CQR]$

[PQR]=$\frac{4ab}{4ab}S-\frac{ab-a\sqrt{b^2-c^2}}{4ab}\ S-\frac{ba-b\sqrt{a^2-c^2}}{4ba}\ S-\frac{\left(b+\sqrt{b^2-c^2}\right)\left(a+\sqrt{a^2-c^2}\right)}{4\,a\,b}S$

Es decir, $[PQR]=\frac{ab-\sqrt{a^2-c^2}\sqrt{b^2-c^2}}{4ab}\ S$; Así, $[CTS]+[PQR]=\frac{2ab-a\sqrt{b^2-c^2}-b\sqrt{a^2-c^2}}{4\,a\,b}S$

Y, cqd, con (1) tenemos la igualdad.

Ricardo Barroso Campos . Jubilado. Sevilla. España.