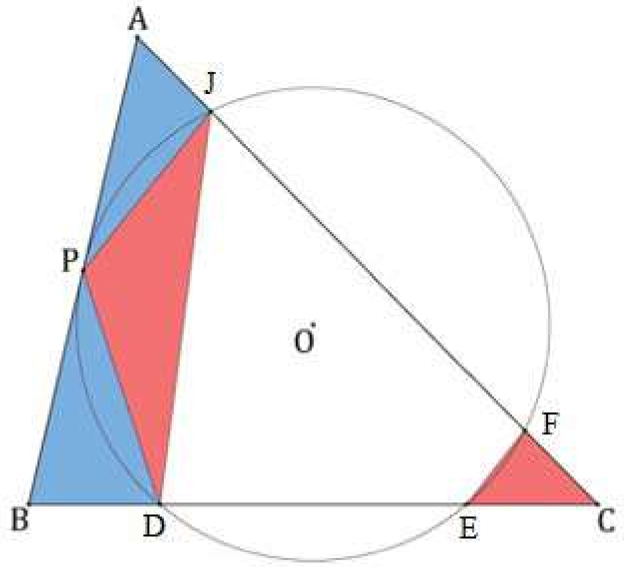
TRIÁNGULOS CABRI

Problema 1000. (propuesto por Thanos Kalogerakis) En la siguiente figura, $AB < \min\{AC, BC\}$, el punto O es el circuncentro del triángulo ABC y el punto P es el punto de tangencia entre la recta AB y la circunferencia centrada en O:



Probar que:

$$(PBD) + (PJA) = (PDJ) + (CFE)$$

Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, como:

$$\left\{ \begin{array}{l} O = (a^2 S_A : b^2 S_B : c^2 S_C) \\ P = (1 : 1 : 0) \end{array} \right. \Rightarrow OP^2 = \frac{c^2 S_C^2}{4S^2} \underset{S_C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2} > 0}{\Rightarrow} OP = \frac{c S_C}{2S}$$

entonces, la ecuación de la circunferencia con centro en el punto O y radio OM es:

$$4(c^2 xy + b^2 xz + a^2 xy) - c^2 (x + y + z)^2 = 0$$

siendo sus puntos de intersección con las rectas BC y CA:

$$\left\{ \begin{array}{l} D = \left(0 : a + \sqrt{a^2 - c^2} : a - \sqrt{a^2 - c^2}\right) \\ E = \left(0 : a - \sqrt{a^2 - c^2} : a + \sqrt{a^2 - c^2}\right) \\ F = \left(b + \sqrt{b^2 - c^2} : 0 : b - \sqrt{b^2 - c^2}\right) \\ J = \left(b - \sqrt{b^2 - c^2} : 0 : b + \sqrt{b^2 - c^2}\right) \end{array} \right.$$

por lo que:

$$\frac{(PBD)+(PJA)}{(ABC)}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a+\sqrt{a^2-c^2} & a-\sqrt{a^2-c^2} \end{vmatrix}}{4a}+\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ b-\sqrt{b^2-c^2} & 0 & b+\sqrt{b^2-c^2} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{4b}$$

$$=\frac{a-\sqrt{a^2-c^2}}{4a}+\frac{b+\sqrt{b^2-c^2}}{4b}$$

$$=\frac{2ab-b\sqrt{a^2-c^2}+a\sqrt{b^2-c^2}}{4ab}$$

$$\frac{(PDJ)+(CFE)}{(ABC)}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a+\sqrt{a^2-c^2} & a-\sqrt{a^2-c^2} \\ b-\sqrt{b^2-c^2} & 0 & b+\sqrt{b^2-c^2} \end{vmatrix}}{8ab}+\frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ b+\sqrt{b^2-c^2} & 0 & b-\sqrt{b^2-c^2} \\ 0 & a-\sqrt{a^2-c^2} & a+\sqrt{a^2-c^2} \end{vmatrix}}{4ab}$$

$$=\frac{ab+\sqrt{a^2-c^2}\sqrt{b^2-c^2}}{4ab}+\frac{\left(a-\sqrt{a^2-c^2}\right)\left(b+\sqrt{b^2-c^2}\right)}{4ab}$$

$$=\frac{2ab-b\sqrt{a^2-c^2}+a\sqrt{b^2-c^2}}{4ab}$$

y, por tanto:

$$(PBD)+(PJA)=(PDJ)+(CFE)$$

Problema 1001. (propuesto por César Beade Franco) Dado un triángulo, determinar los puntos cuyas distancias a cada lado son:

① Proporcionales a la longitud del mismo.

② Inversamente proporcionales a la longitud del mismo.

Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, si $P=(u:v:w)\ (u+v+w>0)$, entonces, su triángulo pedal es:

$$\begin{cases} D=(0:uS_C+a^2v:uS_B+a^2w) \\ E=(vS_C+b^2u:0:vS_A+b^2w) \\ F=(wS_B+c^2u:wS_A+c^2v:0) \end{cases}$$

por lo que los cuadrados de las distancias del punto P a cada uno de los lados del triángulo ABC son:

$$\begin{cases} d^2(P,BC)=PD^2=\dfrac{u^2S^2}{(u+v+w)^2a^2} \\ d^2(P,CA)=PE^2=\dfrac{v^2S^2}{(u+v+w)^2b^2} \\ d^2(P,AB)=PF^2=\dfrac{w^2S^2}{(u+v+w)^2c^2} \end{cases}$$

① Para que el punto P verifique la condición impuesta en el enunciado debe ocurrir que:

$$\frac{d(P,BC)}{a}=\frac{d(P,CA)}{b}=\frac{d(P,AB)}{c}$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{d^2(P,BC)}{a^2}=\frac{d^2(P,CA)}{b^2}=\frac{d^2(P,AB)}{c^2}$$

por lo que:

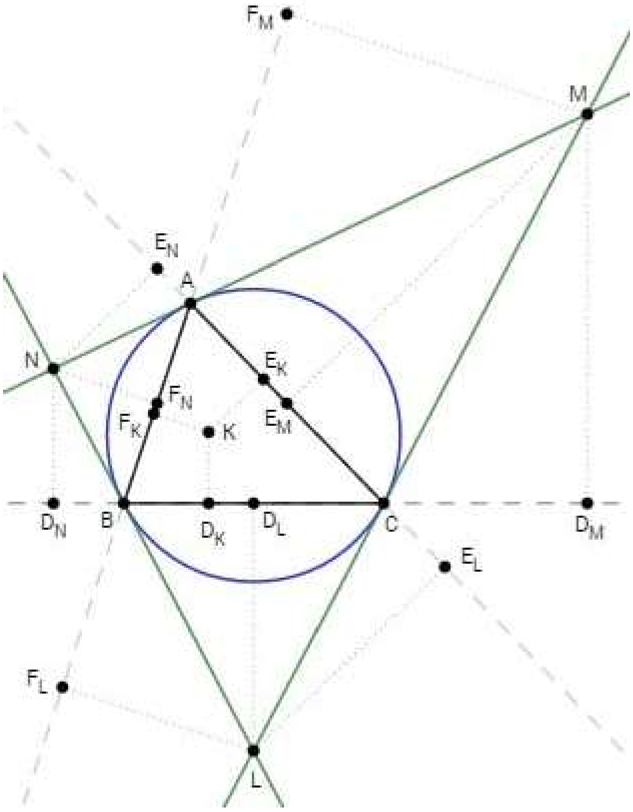
$$(0,0,0)=(d^2(P,BC),d^2(P,CA),d^2(P,AB))\times(a^2,b^2,c^2)$$

$$(0,0,0)=\left(\frac{(c^2v-b^2w)(c^2v+b^2w)S^2}{(u+v+w)^2b^2c^2},\frac{(c^2u-a^2w)(c^2u+a^2w)S^2}{(u+v+w)^2a^2c^2},\frac{(b^2u-a^2v)(b^2u+a^2v)S^2}{(u+v+w)^2a^2b^2}\right)$$

y, por tanto:

$$\begin{cases} 0=(c^2v-b^2w)(c^2v+b^2w) \\ 0=(c^2u-a^2w)(c^2u+a^2w) \\ 0=(b^2u-a^2v)(b^2u+a^2v) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} u=\dfrac{a^2w}{c^2} \\ v=\dfrac{b^2w}{c^2} \end{cases} \Rightarrow P=(a^2:b^2:c^2)=K \\ \text{ó} \\ \begin{cases} u=-\dfrac{a^2w}{c^2} \\ v=\dfrac{b^2w}{c^2} \end{cases} \Rightarrow P=(-a^2:b^2:c^2)=L \\ \text{ó} \\ \begin{cases} u=\dfrac{a^2w}{c^2} \\ v=-\dfrac{b^2w}{c^2} \end{cases} \Rightarrow P=(a^2:-b^2:c^2)=M \\ \text{ó} \\ \begin{cases} u=-\dfrac{a^2w}{c^2} \\ v=-\dfrac{b^2w}{c^2} \end{cases} \Rightarrow P=(a^2:b^2:-c^2)=N \end{cases}$$

siendo K el punto simediano del triángulo ABC y L, M y N los puntos de intersección entre las rectas tangentes a su circunferencia circunscrita en los puntos A, B y C.



② Para que el punto P verifique la condición impuesta en el enunciado debe ocurrir que:

$$\frac{d(P,BC)}{\frac{1}{a}}=\frac{d(P,CA)}{\frac{1}{b}}=\frac{d(P,AB)}{\frac{1}{c}}$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{d^2(P,BC)}{\frac{1}{a^2}}=\frac{d^2(P,CA)}{\frac{1}{b^2}}=\frac{d^2(P,AB)}{\frac{1}{c^2}}$$

por lo que:

$$(0,0,0)=(d^2(P,BC),d^2(P,CA),d^2(P,AB))\times\left(\frac{1}{a^2},\frac{1}{b^2},\frac{1}{c^2}\right)$$

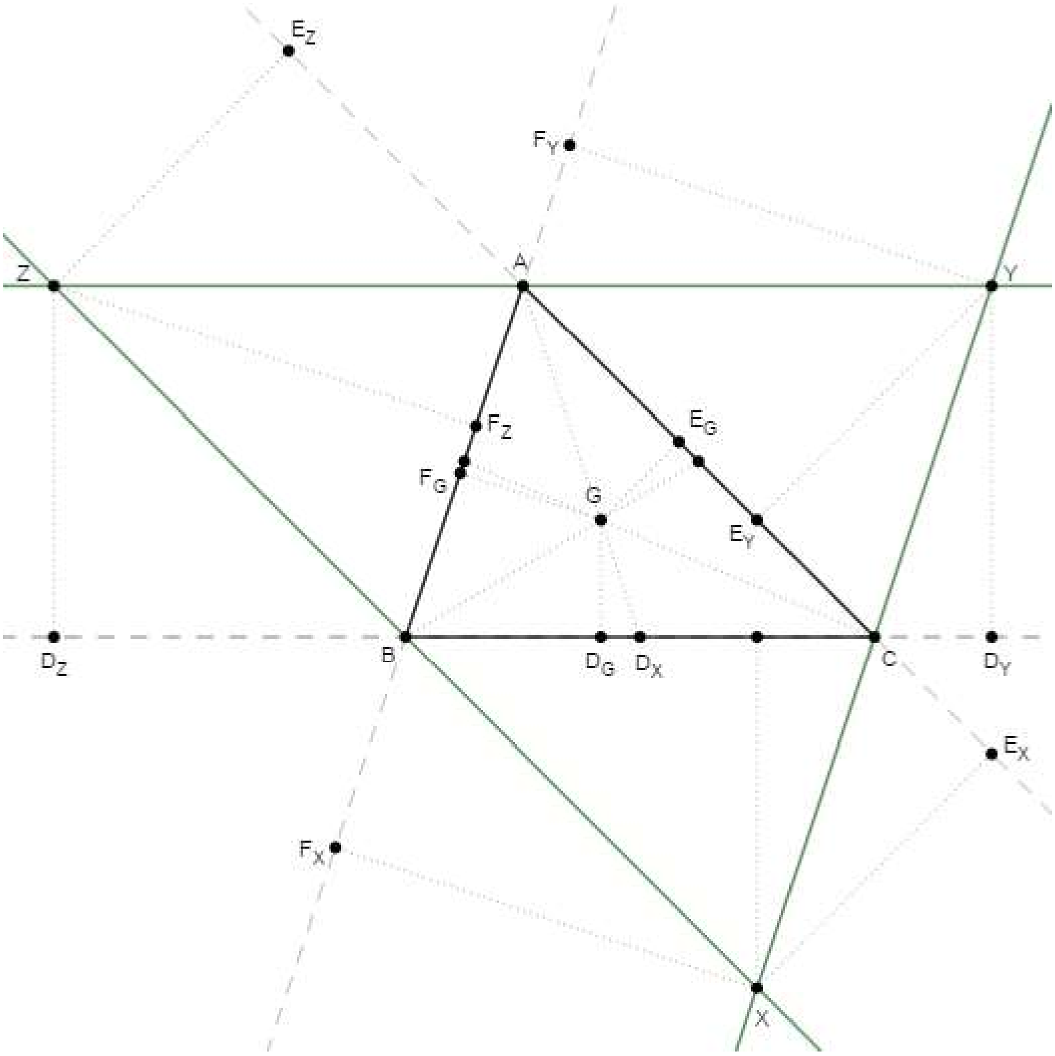
$$(0,0,0)=\left(\frac{(w-v)(w+v)a^2S^2}{(u+v+w)^2},\frac{(u-w)(u+w)b^2S^2}{(u+v+w)^2},\frac{(v-u)(v+u)c^2S^2}{(u+v+w)^2}\right)$$

y, por tanto:

$$\begin{cases} 0=(w-v)(w+v) \\ 0=(u-w)(u+w) \\ 0=(v-u)(v+u) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} u=w \\ v=w \end{cases} \Rightarrow P=(1:1:1)=G \\ \text{ó} \\ \begin{cases} u=-w \\ v=w \end{cases} \Rightarrow P=(-1:1:1)=X \\ \text{ó} \\ \begin{cases} u=w \\ v=-w \end{cases} \Rightarrow P=(1:-1:1)=Y \\ \text{ó} \\ \begin{cases} u=-w \\ v=-w \end{cases} \Rightarrow P=(1:1:-1)=Z \end{cases}$$

siendo G el baricentro del triángulo ABC y X, Y y Z los puntos de intersección entre las rectas paralelas en los puntos A, B y C al correspondiente lado opuesto.

TRIÁNGULOS CABRI



Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

16 de mayo de 2021 a 15 de junio de 2021

TRIÁNGULOS CABRI

Problema 994. (propuesto por Antonio Casas Pérez) Sea ABC un triángulo. Elegido un punto P de la recta BC, se construye la recta r que pasa por los puntos proyección ortogonal de P sobre las rectas AB y AC. Probar que dichas rectas envuelven una cónica. ¿ Qué tipo de cónica es la curva envuelta ?. Hallarla.

Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, si $P=(0:p:1-p)$ $(p\in\mathbb{R})$, entonces, los puntos proyección ortogonal de P sobre las rectas AB y AC son:

$$\begin{cases} U=((1-p)S_B : S_A+pS_B : 0) \\ V=(pS_C : 0 : 2b^2-pS_C) \end{cases}$$

por lo que:

$$UV\equiv(2b^2-pS_C)(S_A+pS_B)x-(1-p)S_B(2b^2-pS_C)y-pS_C(S_A+pS_B)z=0$$

Una vez determinadas las ecuaciones de todas estas rectas, vamos a determinar su envolvente, para lo cual tenemos que eliminar el parámetro p del sistema formado por la ecuación anterior y su ecuación derivada con respecto a p:

$$\begin{cases} 0=(2b^2-pS_C)(S_A+pS_B)x-(1-p)S_B(2b^2-pS_C)y-pS_C(S_A+pS_B)z \\ 0=[S_B(2b^2-pS_C)-S_C(S_A+pS_B)]x+S_B[(1-2p)S_C+2b^2]y-S_C[S_A+2pS_B]z \end{cases} \quad (p\in\mathbb{R})$$

por lo que, despejando p en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera, obtenemos la ecuación de una cónica:

$$4S^4x^2+4S_A^2S_B^2y^2+4S_A^2S_C^2z^2+4S^2S_AS_Bxy+4S^2S_AS_Cxz+(a^4-2a^2b^2+b^4-2a^2c^2-6b^2c^2+c^4)S_BS_Cyz=0$$

que es de tipo parabólico, ya que su discriminante es $\Delta=0$. Además, como el determinante de su matriz asociada es:

$$\begin{vmatrix} 8S^4 & 4S^2S_AS_B & 4S^2S_AS_C \\ 4S^2S_AS_B & 8S_A^2S_B^2 & (a^4-2a^2b^2+b^4-2a^2c^2-6b^2c^2+c^4)S_BS_C \\ 4S^2S_AS_C & (a^4-2a^2b^2+b^4-2a^2c^2-6b^2c^2+c^4)S_BS_C & 8S^2S_AS_B \end{vmatrix}=-256b^4c^4S_B^2S_C^2$$

vamos a distinguir tres casos:

① Si $S_B=0$ (es decir, cuando el triángulo ABC es rectángulo en B), esta cónica es degenerada, tratándose de una recta doble, cuya ecuación es:

$$(x+z)^2=0$$

y corresponde a la recta paralela a AC pasando por el punto B.

② Si $S_C=0$ (es decir, cuando el triángulo ABC es rectángulo en C), esta cónica es degenerada, tratándose de una recta doble, cuya ecuación es:

$$(x+y)^2=0$$

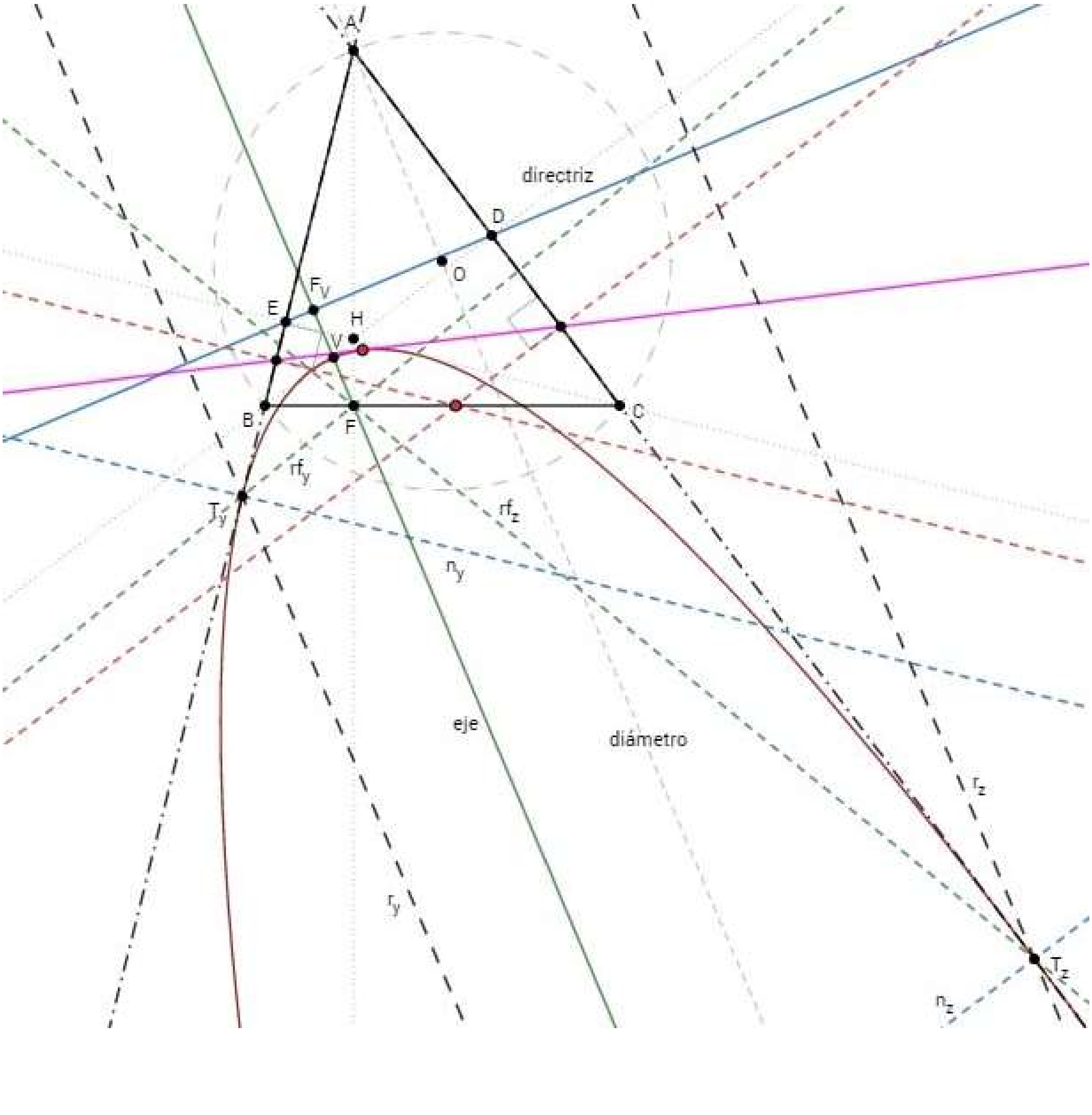
y corresponde a la recta paralela a AB pasando por el punto C.

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega
16 de mayo de 2021 a 15 de junio de 2021

③ Si $S_BS_C \neq 0$ (es decir, cuando el triángulo ABC no es rectángulo ni en B ni en C), esta cónica es no degenerada, tratándose de una parábola, cuyo único punto en la recta del infinito es su centro (conjugado de la recta del infinito) $Q=(b^2S_B+c^2S_C:-b^2S_B:-c^2S_C)$, que coincide con el punto del infinito de la ceviana correspondiente al vértice A del circuncentro $O=(a^2S_A:b^2S_B:c^2S_C)$ del triángulo ABC, cuya ecuación es:

$$c^2S_Cy-b^2S_Bz=0$$

y, por tanto, los diámetros de esta parábola son paralelos a dicha ceviana.



Además:

❶ Esta parábola corta a la recta AB únicamente en el punto $T_y = (S_B S_C : S^2 : 0)$, por lo que es tangente a ella en este punto, siendo las ecuaciones del rayo paralelo al eje de la parábola que incide en ella en el punto T_y y de la recta normal a la parábola en dicho punto las siguientes:

$$\begin{cases} r_y \equiv 0 = 4S^2x + 4S_AS_By - (a^4 - 4a^2b^2 + 3b^4 - 2a^2c^2 - 4b^2c^2 + c^4)z \\ n_y \equiv 0 = S^2x + S_AS_By + 2b^2S_Bz \end{cases}$$

por lo que la ecuación de la recta reflexión de la recta r_y sobre la recta n_y es:

$$rf_y \equiv S^2x + S_AS_By - S_AS_Cz = 0$$

❷ Esta parábola corta a la recta AC únicamente en el punto $T_z = (S_B S_C : S^2 : 0)$, por lo que es tangente a ella en este punto, siendo las ecuaciones del rayo paralelo al eje de la parábola que incide en ella en el punto T_z y de la recta normal a la parábola en dicho punto las siguientes:

$$\begin{cases} r_z \equiv 0 = 4S^2x - (a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - 4a^2c^2 - 4b^2c^2 + 3c^4)y + 4S_AS_Cz \\ n_z \equiv 0 = S^2x + 2c^2S_Cy + S_AS_Cz \end{cases}$$

por lo que la ecuación de la recta reflexión de la recta r_z sobre la recta n_z es:

$$rf_z \equiv S^2x - S_AS_By + S_AS_Cz = 0$$

❸ Las coordenadas del foco F de esta parábola están determinadas por la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = S^2x + S_AS_By - S_AS_Cz \\ 0 = S^2x - S_AS_By + S_AS_Cz \end{cases} \Rightarrow F = (0 : S_C : S_B)$$

y, por tanto, dicho foco es el pie de la altura correspondiente al vértice A del triángulo ABC, siendo su eje el diámetro que pasa por el foco, cuya ecuación es:

$$2(b-c)(b+c)S^2x + (-a^2b^2 + b^4 - a^2c^2 - 2b^2c^2 + c^4)S_By - (-a^2b^2 + b^4 - a^2c^2 - 2b^2c^2 + c^4)S_Cz = 0$$

❹ Las coordenadas del vértice V de esta parábola están determinadas por la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = 2(b-c)(b+c)S^2x + (-a^2b^2 + b^4 - a^2c^2 - 2b^2c^2 + c^4)S_By - (-a^2b^2 + b^4 - a^2c^2 - 2b^2c^2 + c^4)S_Cz \\ 0 = 4S^4x^2 + 4S_A^2S_B^2y^2 + 4S_A^2S_C^2z^2 + 4S^2S_AS_Bxy + 4S^2S_AS_Cxz + (a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2c^2 - 6b^2c^2 + c^4)S_BS_Cyz \end{cases}$$

por lo que:

$$V = (S_BS_C(a^2b^2 - b^4 + a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4) : 2b^2S_CS : 2c^2S_BS)$$

❺ Como el punto simétrico del punto F respecto del punto V es:

$$F_V = (S_BS_C(a^2b^2 - b^4 + a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4) : -b^2S_C(a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - 2b^2c^2 + c^4) : -c^2S_B(a^4 + b^4 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + c^4))$$

y la directriz de esta parábola es la recta perpendicular a su eje pasando por este punto, entonces la ecuación de ésta es:

$$S_A x - S_B y - S_C z = 0$$

siendo sus puntos de intersección con las rectas AB y AC:

$$\begin{cases} E = \text{directriz} \cap AB = (S_B : S_A : 0) \\ D = \text{directriz} \cap AC = (S_C : 0 : S_A) \end{cases}$$

es decir, los pies de las alturas corresdientes a los vértices C y B, respectivamente, del triángulo ABC.

Finalmente, para construir trazamos las tres alturas del triángulo ABC y hallamos los puntos D, E y F, siendo el punto F su foco y la recta DE su directriz, por lo que ya podemos construir la parábola.