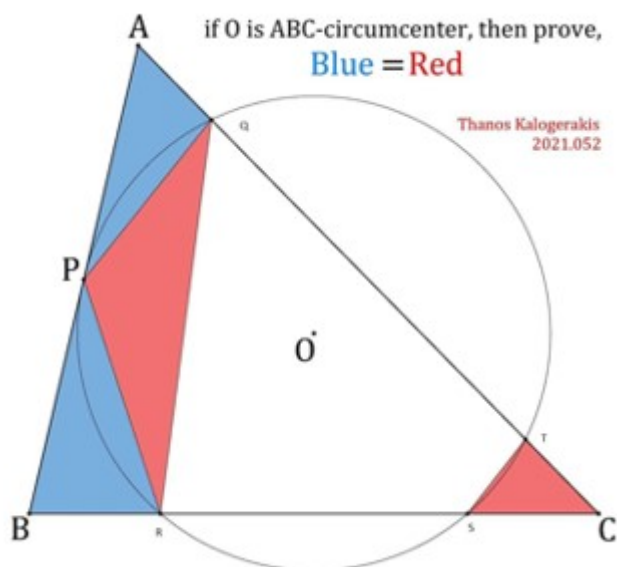


Quincena del 16 de Mayo al 15 de Junio de 2021.

Propuesto por Thanos Kalogerakis, por invitación del director

Problema 1000

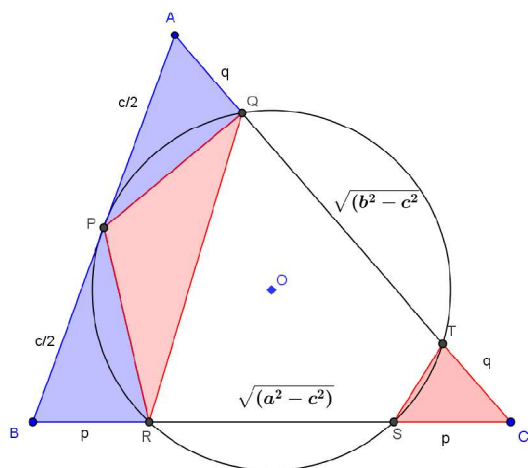


Si O es el circuncentro del triángulo probar que el área dibujada en azul es igual al área dibujada en rojo.

Kalogerakis, T. (2021): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

Tenemos un triángulo ABC donde $c = AB$ es el menor de los lados. P es el punto medio del lado AB . Se entiende que las áreas se toman sin signo.



Los vértices A, B, C tienen la misma potencia respecto de la circunferencia, igual a $\frac{c^2}{4}$. Usando este dato para los vértices B y C tenemos que $BR \cdot (a - CS) = CS \cdot (a - BR)$ de donde $BR = CS$, y de forma similar $AQ = CT$.

Poniendo $BR = p$, tenemos $p(a - p) = \frac{c^2}{4} \Leftrightarrow p^2 - ap + \frac{c^2}{4} = 0$

La menor de las soluciones es $p = \frac{a - \sqrt{a^2 - c^2}}{2}$. Con esto tenemos que $RS = \sqrt{a^2 - c^2}$ y por analogía $QT = \sqrt{b^2 - c^2}$.

Definimos la función $f(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 - c^2}}{2x}$, $f(c) = \frac{1}{2}$, y para simplificar tomaremos el área del triángulo ABC igual a la unidad.

Con ella vamos a expresar las diferentes áreas: tenemos $[CST] = f(a)f(b)$; $[APQ] = f(b)f(c)$ y $[BPR] = f(c)f(a)$.

Para el triángulo PQR vamos a usar las coordenadas baricéntricas de los vértices.

$P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$; $Q(1 - f(b), 0, f(b))$; $R(0, 1 - f(a), f(a))$, con estos datos el área de este triángulo es

$$[PRQ] = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 - f(a) & f(a) \\ 1 - f(b) & 0 & f(b) \end{vmatrix} = \frac{f(b) + f(a)}{2} - f(a) \cdot f(b)$$

La suma de las áreas dibujadas de rojo es $\frac{f(b) + f(a)}{2}$; la de las áreas en azul es $f(c) \cdot f(a) + f(b) \cdot f(c) = \frac{f(b) + f(a)}{2}$. ■