Pr. Cabri 1001

Enunciado

Dado un triángulo, determinar los puntos cuyas distancias a cada lado son:
a) Proporcionales a la longitud del mismo.
b) Inversamente proporcionales a la longitud del mismo.

Propuesto por César Beade Franco.

Solución

de César Beade Franco

a) Consideremos el triángulo A(a,b), B(0,0), C(1,0) y el punto P(p,q).
Como la distancia de P al lado BC es |q|, para calcular los puntos hemos de resolver los sistemas

$$\frac{db}{b}=q,\ \frac{dc}{c}=q \text{ y } \frac{db}{b}=q,\ \frac{dc}{c}=-q,$$

donde $db=\frac{b-b\,p-q+a\,q}{\sqrt{(-1+a)^2+b^2}}$ es la distancia de P a CA y $dc=\frac{-b\,p+a\,q}{\sqrt{a^2+b^2}}$ la distancia a AB.

Además $b=\sqrt{(-1+a)^2+b^2}$ y $c=\sqrt{a^2+b^2}$

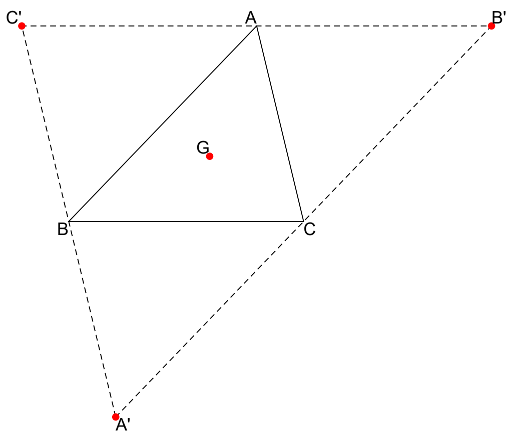
Operando el primer sistema tiene como solución

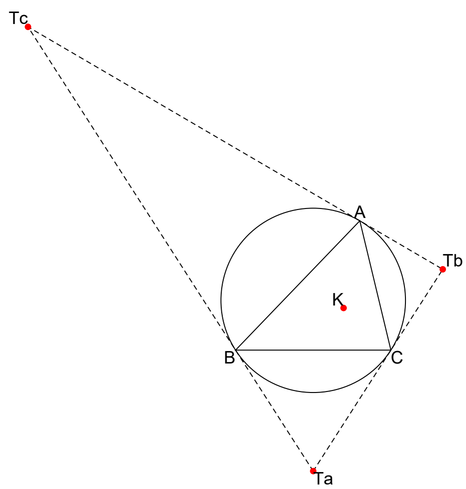
$K\left(\frac{a+a^2+b^2}{2\left(1-a+a^2+b^2\right)},\ \frac{b}{2\left(1-a+a^2+b^2\right)}\right)$ y $Ta=\left(\frac{1}{2},\ -\frac{b}{2\left(-a+a^2+b^2\right)}\right)$.

El segundo sistema tiene soluciones

$Tb\left(\frac{a+a^2+b^2}{2\,a},\ \frac{b}{2\,a}\right)$ y $Tc\left(\frac{-a+a^2+b^2}{2\,(-1+a)},\ -\frac{b}{2\,(-1+a)}\right)$.

K es el punto de Lemoine y Ta, Tb, Tc son los vértices del triángulo tangencial.





b) Si A, B, C son los vértices del triángulo , a, b, c sus lados y da, db dc, las distancias de un punto P a cada lado, se ha de cumplir que a.da=b.db=c.dc=cte. Es decir, que los triángulos PAB, PBC y PCA tienen la misma área. Esto significa, suponiendo (ABC)=1, que las coordenadas baricéntricas de P sean iguales (en valor absoluto). Los únicos puntos que verifican esta condición son el baricentro $G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ y los vértices del triángulo antimedial A'(-1,1,1), B'(1,-1,1) y C'(1,1,-1).

Se da la notable circunstancia (según observó Barroso) que las cuatro soluciones de un apartado son las transformadas isogonales del otro. Eso es conocido para K y G. También lo son el triángulo antimedial y el tangencial (1).

Notas

(1) Se puede demostrar por cálculo directo para un triángulo de vértices A(a,b), B(0,0), C(1,0).
Para un punto cualquiera P(x,y) su transormado isógonal es P'$\left(\frac{(b-b\,x+(-1+a)\,y)\,(a\,x+b\,y)}{(-1+a)\,a\,y+b\left(x-x^2+(b-y)\,y\right)}, -\frac{(b\,x-a\,y)\,(b\,(-1+x)+y-a\,y)}{(-1+a)\,a\,y+b\left(x-x^2+(b-y)\,y\right)}\right)$.
Aplicando ésto a A'(1-a,-b) obtenemos Ta$\left(\frac{1}{2}, -\frac{b}{2\left(-a+a^2+b^2\right)}\right)$.