TRIÁNGULOS CABRI

Problema 1001. (propuesto por César Beade Franco) Dado un triángulo, determinar los puntos cuyas distancias a cada lado son:

① Proporcionales a la longitud del mismo.

② Inversamente proporcionales a la longitud del mismo.

Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, si $P=(u:v:w)$ $(u+v+w>0)$, entonces, su triángulo pedal es:

$$\begin{cases} D=(0:uS_C+a^2v:uS_B+a^2w) \\ E=(vS_C+b^2u:0:vS_A+b^2w) \\ F=(wS_B+c^2u:wS_A+c^2v:0) \end{cases}$$

por lo que los cuadrados de las distancias del punto P a cada uno de los lados del triángulo ABC son:

$$\begin{cases} d^2(P,BC)=PD^2=\dfrac{u^2S^2}{(u+v+w)^2a^2} \\ d^2(P,CA)=PE^2=\dfrac{v^2S^2}{(u+v+w)^2b^2} \\ d^2(P,AB)=PF^2=\dfrac{w^2S^2}{(u+v+w)^2c^2} \end{cases}$$

① Para que el punto P verifique la condición impuesta en el enunciado debe ocurrir que:

$$\frac{d(P,BC)}{a}=\frac{d(P,CA)}{b}=\frac{d(P,AB)}{c}$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{d^2(P,BC)}{a^2}=\frac{d^2(P,CA)}{b^2}=\frac{d^2(P,AB)}{c^2}$$

por lo que:

$$(0,0,0)=(d^2(P,BC),d^2(P,CA),d^2(P,AB))\times(a^2,b^2,c^2)$$

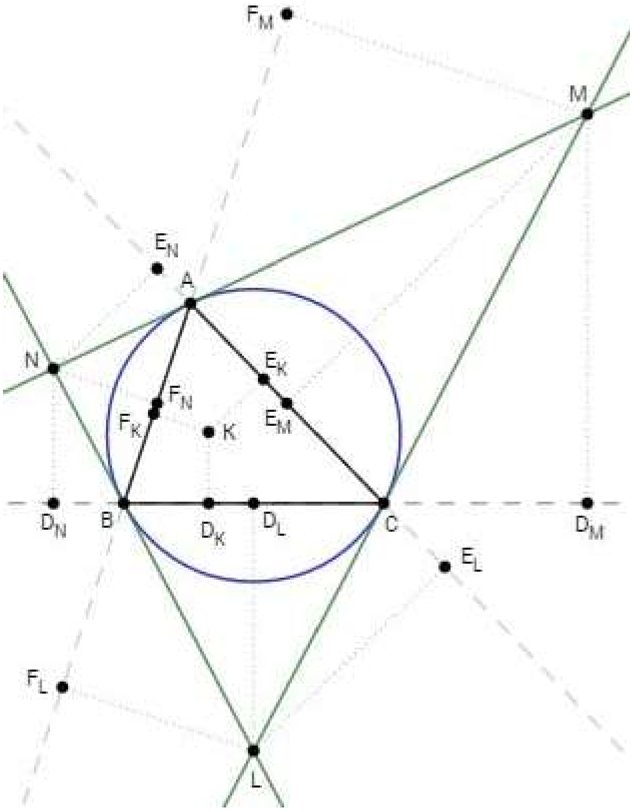
$$(0,0,0)=\left(\frac{(c^2v-b^2w)(c^2v+b^2w)S^2}{(u+v+w)^2b^2c^2},\frac{(c^2u-a^2w)(c^2u+a^2w)S^2}{(u+v+w)^2a^2c^2},\frac{(b^2u-a^2v)(b^2u+a^2v)S^2}{(u+v+w)^2a^2b^2}\right)$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

y, por tanto:

$$\begin{cases} 0=(c^2v-b^2w)(c^2v+b^2w) \\ 0=(c^2u-a^2w)(c^2u+a^2w) \\ 0=(b^2u-a^2v)(b^2u+a^2v) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} u=\dfrac{a^2w}{c^2} \\ v=\dfrac{b^2w}{c^2} \end{cases} \Rightarrow P=(a^2:b^2:c^2)=K \\ \text{ó} \\ \begin{cases} u=-\dfrac{a^2w}{c^2} \\ v=\dfrac{b^2w}{c^2} \end{cases} \Rightarrow P=(-a^2:b^2:c^2)=L \\ \text{ó} \\ \begin{cases} u=\dfrac{a^2w}{c^2} \\ v=-\dfrac{b^2w}{c^2} \end{cases} \Rightarrow P=(a^2:-b^2:c^2)=M \\ \text{ó} \\ \begin{cases} u=-\dfrac{a^2w}{c^2} \\ v=-\dfrac{b^2w}{c^2} \end{cases} \Rightarrow P=(a^2:b^2:-c^2)=N \end{cases}$$

siendo K el punto simediano del triángulo ABC y L, M y N los puntos de intersección entre las rectas tangentes a su circunferencia circunscrita en los puntos A, B y C.



② Para que el punto P verifique la condición impuesta en el enunciado debe ocurrir que:

$$\frac{d(P,BC)}{\frac{1}{a}}=\frac{d(P,CA)}{\frac{1}{b}}=\frac{d(P,AB)}{\frac{1}{c}}$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{d^2(P,BC)}{\frac{1}{a^2}}=\frac{d^2(P,CA)}{\frac{1}{b^2}}=\frac{d^2(P,AB)}{\frac{1}{c^2}}$$

por lo que:

$$(0,0,0)=(d^2(P,BC),d^2(P,CA),d^2(P,AB))\times\left(\frac{1}{a^2},\frac{1}{b^2},\frac{1}{c^2}\right)$$

$$(0,0,0)=\left(\frac{(w-v)(w+v)a^2S^2}{(u+v+w)^2},\frac{(u-w)(u+w)b^2S^2}{(u+v+w)^2},\frac{(v-u)(v+u)c^2S^2}{(u+v+w)^2}\right)$$

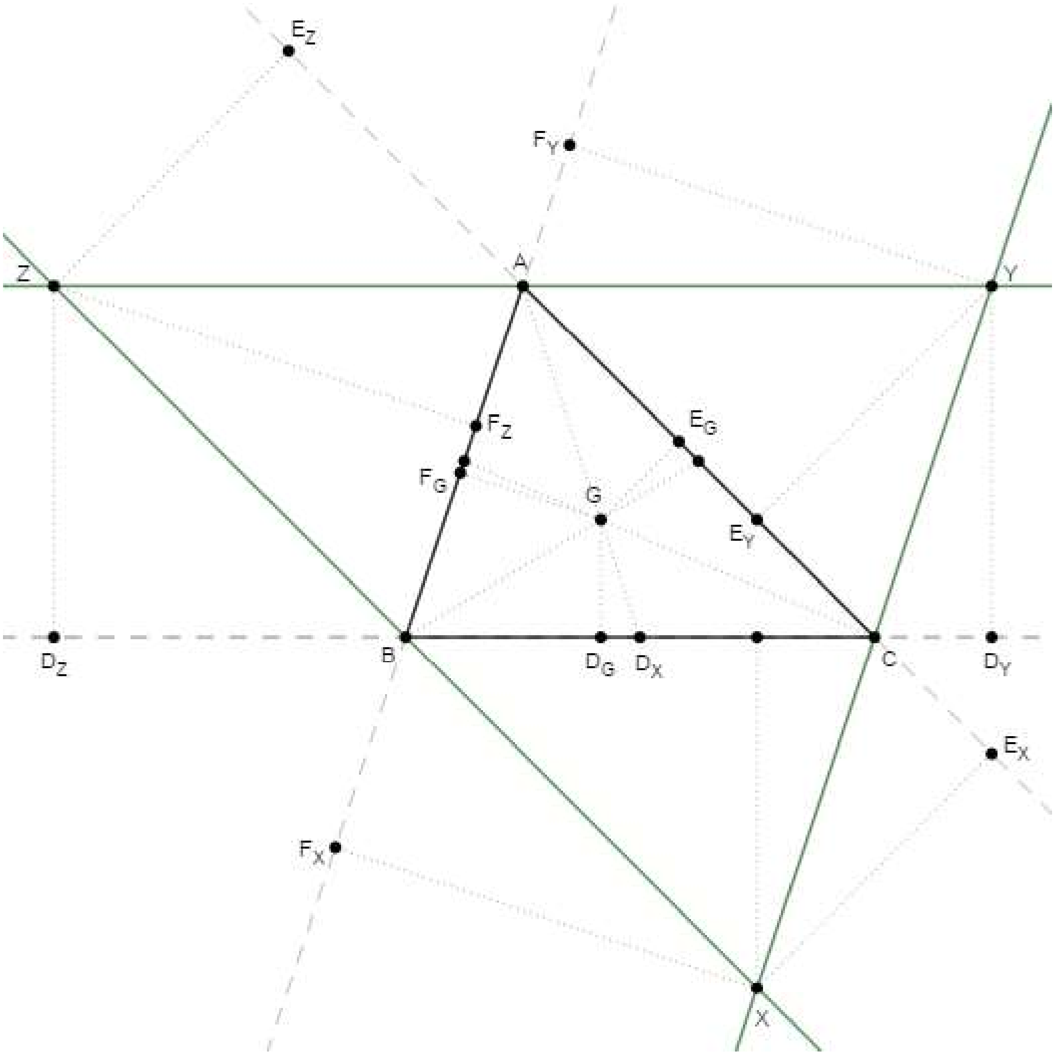
y, por tanto:

$$\left\{\begin{array}{l}0=(w-v)(w+v)\\0=(u-w)(u+w)\\0=(v-u)(v+u)\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}u=w\\v=w\end{array}\right.\Rightarrow P=(1:1:1)=G\\ \text{ó}\\ \left\{\begin{array}{l}u=-w\\v=w\end{array}\right.\Rightarrow P=(-1:1:1)=X\\ \text{ó}\\ \left\{\begin{array}{l}u=w\\v=-w\end{array}\right.\Rightarrow P=(1:-1:1)=Y\\ \text{ó}\\ \left\{\begin{array}{l}u=-w\\v=-w\end{array}\right.\Rightarrow P=(1:1:-1)=Z\end{array}\right.$$

siendo G el baricentro del triángulo ABC y X, Y y Z los puntos de intersección entre las rectas paralelas en los puntos A, B y C al correspondiente lado opuesto.

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega
16 de mayo de 2021 a 15 de junio de 2021

TRIÁNGULOS CABRI



Miguel-Ángel Pérez García-Ortega
16 de mayo de 2021 a 15 de junio de 2021