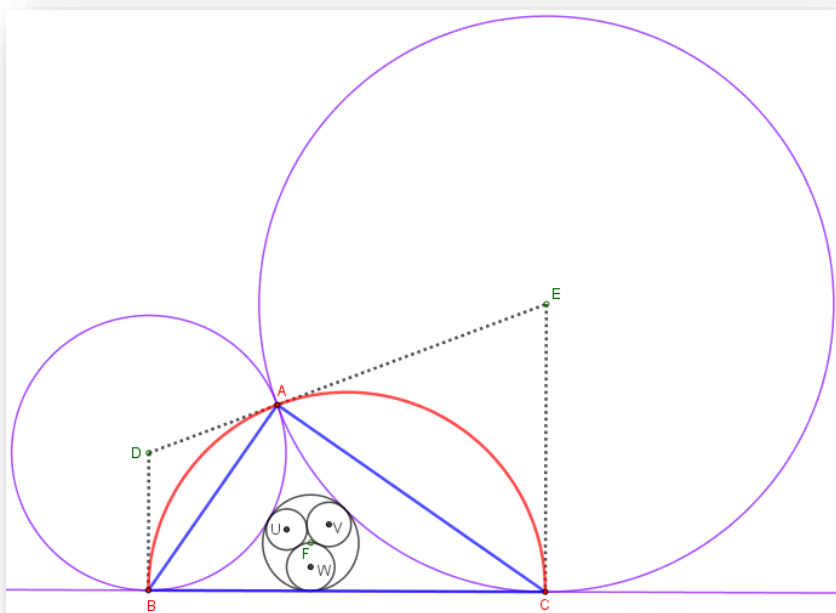


Problema 1002. LABORATORIO VIRTUAL DE TRIÁNGULOS.

A) Para un triángulo ABC , se consideran las circunferencias que pasan por el punto A y son tangentes a la recta BC en los puntos B y C , respectivamente. Dado un segmento BC , determinar el lugar geométrico que debe describir el punto A para que ambas circunferencias sean tangentes en este punto y, en este caso, determinar el radio de la circunferencia que es tangente a ambas circunferencias y a la recta BC .

B) Dado un triángulo ABC tal que las circunferencias (D) y (E) que pasan por el punto A y son tangentes a la recta BC en los puntos B y C , respectivamente, son tangentes en el punto A , se considera la circunferencia (F) inscrita en el triángulo mixtilíneo formado por ambas circunferencias y la recta BC . La inversión con respecto a la circunferencia (F) transforma la circunferencia (D) en la circunferencia (U) , la circunferencia (E) en la circunferencia (V) y la recta BC en la circunferencia (W) . Calcular las longitudes y los radios de las circunferencias (U) , (V) y (W) .



Miguel-Ángel Pérez García-Ortega, profesor de Matemáticas en el IES "Bartolomé-José Gallardo" de Campanario (Badajoz).

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros. Córdoba.

(A) A la vista de la configuración realizada observamos los siguientes hechos de interés:

$$\left\{ \angle DAB = \angle DBA = \frac{\pi}{2} - \angle B; \angle ECA = \angle EAC = \frac{\pi}{2} - \angle C \right\} \rightarrow \angle DAB + \angle EAC = \pi - \angle B - \angle C = \angle A$$

Las circunferencias de centros D y E tangentes en B y C respectivamente a la recta BC , serán tangentes si y sólo si los puntos D , A y E se encuentran alineados.

Por tanto, $\angle DAB + \angle EAC + \angle A = \pi$; $\angle A + \angle A = \pi$; $\angle A = \frac{\pi}{2}$.

Por tanto, dado un segmento BC , el Lugar Geométrico de los puntos A que permiten que ambas circunferencias sean tangentes en este punto es una semicircunferencia de diámetro, el segmento $BC = a$.

Sean respectivamente r_1 y r_2 , los radios de las circunferencias tangentes entre sí en el punto A y de centros D y E. Deberá ocurrir que:

$$(r_1 + r_2)^2 = (r_2 - r_1)^2 + a^2 \rightarrow 4r_1 r_2 = a^2$$

Sea r_3 el radio de la circunferencia que es tangente a ambas circunferencias y a la recta BC.

$$(r_1 + r_3)^2 = (r_1 - r_3)^2 + a_1^2; (r_2 + r_3)^2 = (r_2 - r_3)^2 + (a - a_1)^2;$$

Entonces deberá ocurrir que:

$$\{4r_1 r_3 = a_1^2; 4r_2 r_3 = (a - a_1)^2\} \rightarrow 16r_1 r_2 r_3^2 = a_1^2 (a - a_1)^2 \rightarrow 4a^2 r_3^2 = a_1^2 (a - a_1)^2$$

$$16r_1^2 r_3^2 = a_1^4$$

$$r_3^2 = \frac{a_1^2 (a - a_1)^2}{4a^2} = \frac{a_1^4}{16r_1^2} \rightarrow 4(a - a_1)^2 r_1^2 = a^2 a_1^2 \rightarrow a_1 = \frac{a\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}} < a$$

Por fin, obtenemos el valor del radio r_3 :

$$r_3 = \frac{a^2}{4(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2}$$

(B) Dado el triángulo ABC tal que las circunferencias (D) y (E) que pasan por el punto A y son tangentes a la recta BC en los puntos B y C, respectivamente, y son además tangentes en el punto A, consideramos ahora la circunferencia (F) inscrita en el triángulo mixtilíneo formado por ambas circunferencias y la recta BC.

Esta circunferencia tendrá de radio r_3 de modo que si transformamos por inversión respecto de esta circunferencia las de centro D, E y la recta BC, estas imágenes se corresponderán con las circunferencias de centros U, V y W, respectivamente. Sabemos que por inversión se establecen las siguientes relaciones entre los radios de cada par de circunferencias del modo:

* Circunferencia de centro D y radio $r_1 \rightarrow$ Circunferencia de centro U y radio r'_1

$$r'_1 = \frac{r_1 r_3^2}{FD^2 - r_1^2} = \frac{r_1 r_3^2}{(r_1 + r_3)^2 - r_1^2} = \frac{r_1 r_3^2}{r_3(2r_1 + r_3)} = \frac{r_1 r_3}{2r_1 + r_3} = \frac{a^2 r_1}{a^2 + 8r_1(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2};$$

$$r'_1 = \frac{a^2}{12r_2 + 8r_1 + 8a} = \frac{r_1 r_2}{3r_2 + 2r_1 + 4\sqrt{r_1 r_2}} = \frac{r_1 r_2}{r_2 + (\sqrt{2r_1} + \sqrt{2r_2})^2}$$

* Circunferencia de centro E y radio $r_2 \rightarrow$ Circunferencia de centro V y radio r'_2

$$r'_2 = \frac{a^2}{12r_1 + 8r_2 + 8a} = \frac{r_1 r_2}{3r_1 + 2r_2 + 4\sqrt{r_1 r_2}} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + (\sqrt{2r_1} + \sqrt{2r_2})^2}$$

* Recta BC, tangente a la circunferencia inversiva $\rightarrow$ Circunferencia de centro W y radio $r = \frac{1}{2}r_3$.

$$r = \frac{a^2}{8(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2} = \frac{r_1 r_2}{(\sqrt{2r_1} + \sqrt{2r_2})^2}$$