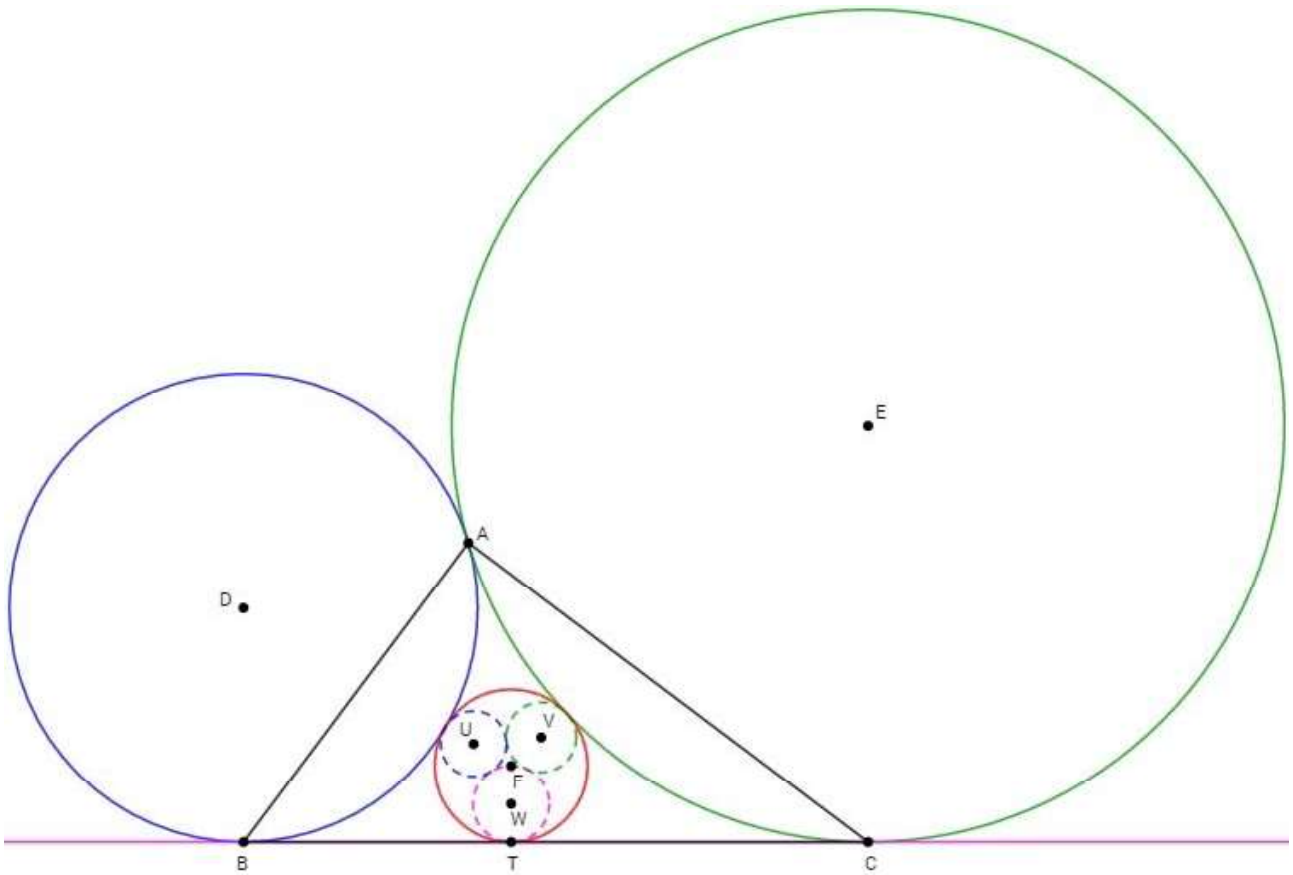


TRIÁNGULOS CABRI

Problema 1002. (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega)

- ① Para un triángulo ABC , se consideran las circunferencias que pasan por el punto A y son tangentes a la recta BC en los puntos B y C , respectivamente. Dado un segmento BC , determinar el lugar geométrico que debe describir el punto A para que ambas circunferencias sean tangentes en este punto y, en este caso, determinar el radio de la circunferencia que es tangente a ambas circunferencias y a la recta BC .
- ② Dado un triángulo ABC tal que las circunferencias (D) y (E) que pasan por el punto A y son tangentes a la recta BC en los puntos B y C , respectivamente, son tangentes en el punto A , se considera la circunferencia (F) inscrita en el triángulo mixtilíneo formado por ambas circunferencias y la recta BC . La inversión con respecto a la circunferencia (F) transforma la circunferencia (D) en la circunferencia (U) , la circunferencia (E) en la circunferencia (V) y la recta BC en la circunferencia (W) . Calcular, en función de las longitudes $b = AC$ y $c = AB$, los radios de las circunferencias (U) , (V) y (W) .



Solución:

- ① Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC :
 - ☺ Como la ecuación de una circunferencia general que pasa por los puntos A y B es:

$$c^2xy + b^2xz + a^2yz - wz(x + y + z) = 0 \quad (w \in \mathbb{R})$$

TRIÁNGULOS CABRI

imponiendo que sea tangente en el punto B a la recta BC , obtenemos que $w = a^2$, por lo que la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto A y es tangente a la recta BC en el punto B es:

$$c^2xy + b^2xz + a^2yz - a^2z(x + y + z) = 0$$

siendo su centro (conjugado de la recta del infinito) el punto:

$$Q_b = (2a^2c^2 : c^2(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2)^2 : -c^2(a^2 - b^2 + c^2))$$

y, por tanto:

$$r_b^2 = AQ_b^2 = \frac{a^2c^4}{4S^2} \Rightarrow r_b = \frac{ac^2}{2S}$$

⊗ Como la ecuación de una circunferencia general que pasa por los puntos A y C es:

$$c^2xy + b^2xz + a^2yz - vy(x + y + z) = 0 \quad (v \in \mathbb{R})$$

imponiendo que sea tangente en el punto C a la recta BC , obtenemos que $v = a^2$, por lo que la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto A y es tangente a la recta BC en el punto C es:

$$c^2xy + b^2xz + a^2yz - a^2y(x + y + z) = 0$$

siendo su centro (conjugado de la recta del infinito) el punto:

$$Q_c = (2a^2b^2 : -b^2(a^2 + b^2 - c^2) : b^2(a^2 + c^2) - (a^2 - c^2)^2)$$

y, por tanto:

$$r_c^2 = AQ_c^2 = \frac{a^2b^4}{4S^2} \Rightarrow r_c = \frac{ab^2}{2S}$$

Además, resolviendo el sistema formado por ambas ecuaciones, obtenemos las coordenadas de los puntos de intersección entre ambas circunferencias:

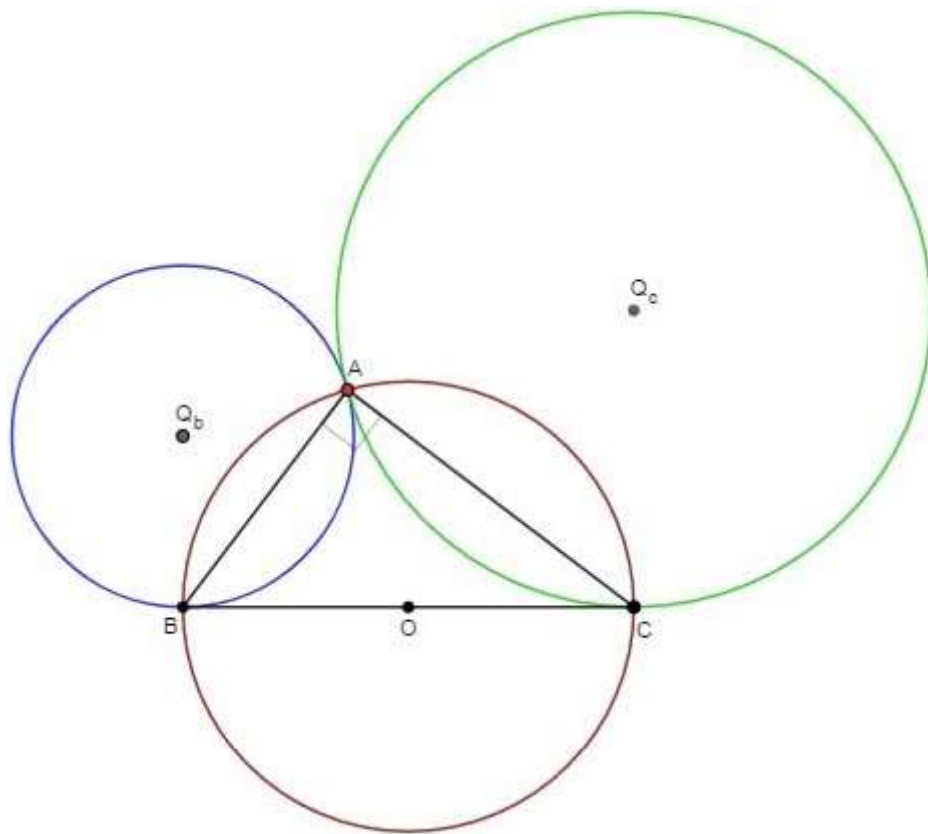
$$\begin{cases} A = (1 : 0 : 0) \\ A' = (a^2 : 2S_A : 2S_A) \end{cases}$$

por lo que imponiendo que ambas circunferencias sean tangentes en el punto A , debe ocurrir que:

$$A' = A \Rightarrow S_A = 0$$

lo cual significa que el punto A debe estar situado sobre la circunferencia cuyo diámetro es BC , exceptuando los puntos B y C , ya que para dichos puntos no tendríamos un triángulo.

TRIÁNGULOS CABRI



Finalmente, en este caso, como:

$$\begin{cases} r_b = \frac{ac^2}{2S} = \frac{ac^2}{4bc} = \frac{ac}{2b} \\ r_c = \frac{ab^2}{2S} = \frac{ab^2}{4bc} = \frac{ab}{2c} \end{cases}$$

si llamamos ρ al radio de la circunferencia que es tangente a ambas circunferencias y a la recta BC y aplicamos el Teorema de Soddy:

$$\left(\frac{1}{\rho} + \frac{2b}{ac} + \frac{2c}{ab} + 0\right)^2 = 2\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{4b^2}{a^2c^2} + \frac{4c^2}{a^2b^2} + 0^2\right)$$

resulta que:

$$\rho = \frac{abc}{2(b+c)^2}$$

② Llamando u , v y w a los radios de estas tres circunferencias, se verifica que:

$$\textcircled{1} \quad u = \frac{\rho^2 r_b}{|FD^2 - r_b^2|} = \frac{\rho^2 r_b}{|(r_b + \rho)^2 - r_b^2|} = \frac{\rho^2 r_b}{\rho(2r_b + \rho)} = \frac{\rho r_b}{2r_b + \rho} = \frac{abc}{2(3b^2 + 4bc + 2c^2)}$$

$$\textcircled{2} \quad v = \frac{\rho^2 r_c}{|FE^2 - r_c^2|} = \frac{\rho^2 r_c}{|(r_c + \rho)^2 - r_c^2|} = \frac{\rho^2 r_c}{\rho(2r_c + \rho)} = \frac{\rho r_c}{2r_c + \rho} = \frac{abc}{2(2b^2 + 4bc + 3c^2)}$$

$$\textcircled{3} \quad w = \frac{\rho}{2} = \frac{abc}{4(b+c)^2}$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega
16 de junio a 31 de agosto de 2021