Pr. Cabri 1003

Enunciado

Para un triángulo ABC, se consideran los radios rb y rc de las circunferencias que pasan por
el punto A y son tangentes a la recta BC en los puntos B y C, respectivamente. Dado un segmento BC,
determinar el lugar geométrico que debe describir el punto A para que:

1) $rb^2 + rc^2 = BC^2$
2) rb. rc = BC^2
3) rb / rc=BC o rc / rb=BC
4) |rb - rc| =BC

Propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega.

Solución

de César Beade Franco

Sea A(x,y) y suponemos B(-1,0) y C(1,0).
Si rb=b y rc=c, podemos obtener rb y rc en función de x, y resolviendo $b^2 = (x+1)^2 + (y-b)^2$ y $c^2 = (x-1)^2 + (y-c)^2$, obteniendo $b=\frac{1+2x+x^2+y^2}{2y}$ y $c=\frac{1-2x+x^2+y^2}{2y}$.

1) $rb^2 + rc^2 = BC^2 \Leftrightarrow \left(\frac{1+2x+x^2+y^2}{2y}\right)^2 + \left(\frac{1-2x+x^2+y^2}{2y}\right)^2 = 4$

$\Leftrightarrow 1 + 6x^2 + x^4 - 6y^2 + 2x^2y^2 + y^4 = 0$,
cuártica que, dibujada, parece ser un óvalo de Cassini.
Un poco de tanteo (*) confirma que si lo es, con focos $(0,\sqrt{3})$ y $(0,-\sqrt{3})$ y constante $2\sqrt{2}$.

2) rb. rc = $BC^2 \Leftrightarrow \frac{1+2x+x^2+y^2}{2y} * \frac{1-2x+x^2+y^2}{2y} = 4 \Leftrightarrow$

$(1-2x+x^2+y^2)(1+2x+x^2+y^2) - 16y^2 = 0 \Leftrightarrow$

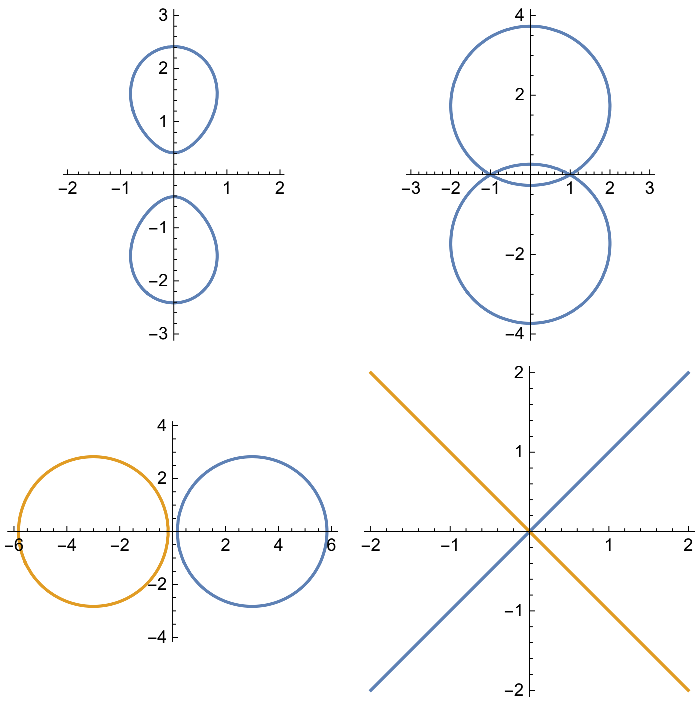
$\left(x^2 + \left(y-\sqrt{3}\right)^2 - 4\right)\left(x^2 + \left(y+\sqrt{3}\right)^2 - 4\right) = 0$,

par de circuferencias de radio 2 y centros respectivos $(0,\sqrt{3})$ y $(0,-\sqrt{3})$.

3) rb / rc=BC $\Leftrightarrow \frac{1+2x+x^2+y^2}{2y} = 2\frac{1-2x+x^2+y^2}{2y} \Leftrightarrow 1 - 6x + x^2 + y^2 = 0$, circunferencia de centro (0,3) y radio $\sqrt{8}$.

Analogamente rc / rb=BC $\Leftrightarrow 1 + 6x + x^2 + y^2 = 0$, circunferencia de centro (0,-3) y radio $\sqrt{8}$.

4) |rb - rc| =BC $\Leftrightarrow \pm\left(\frac{1+2x+x^2+y^2}{2y} - \frac{1-2x+x^2+y^2}{2y}\right) = 2 \Leftrightarrow$ x=±y, par de rectas.



(*) Si los focos son (0,-a) y (0,a) y la constante k, entonces $(x^2+(y+a)^2)(x^2+(y-a)^2) = k^2$.

Comparándola con la anterior ecuación nos da a=$\sqrt{3}$ y k=$2\sqrt{2}$.