

TRIÁNGULOS CABRI

Problema 1003. (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Para un triángulo ABC , se consideran los radios r_b y r_c de las circunferencias que pasan por el punto A y son tangentes a la recta BC en los puntos B y C , respectivamente. Dado un segmento BC , determinar el lugar geométrico que debe describir el punto A para que:

① $r_b^2 + r_c^2 = BC^2$

② $r_b r_c = BC^2$

③ $\frac{r_b}{r_c} = BC$ ó $\frac{r_c}{r_b} = BC$

④ $|r_b - r_c| = BC$

Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC :

☺ Como la ecuación de una circunferencia general que pasa por los puntos A y B es:

$$c^2xy + b^2xz + a^2yz - wz(x + y + z) = 0 \quad (w \in \mathbb{R})$$

imponiendo que sea tangente en el punto B a la recta BC , obtenemos que $w = a^2$, por lo que la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto A y es tangente a la recta BC en el punto B es:

$$c^2xy + b^2xz + a^2yz - a^2z(x + y + z) = 0$$

siendo su centro (conjugado de la recta del infinito) el punto:

$$Q_b = (2a^2c^2 : c^2(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2)^2 : -c^2(a^2 - b^2 + c^2))$$

y, por tanto:

$$r_b^2 = AQ_b^2 = \frac{a^2c^4}{4S^2} \Rightarrow r_b = \frac{ac^2}{2S}$$

⊗ Como la ecuación de una circunferencia general que pasa por los puntos A y C es:

$$c^2xy + b^2xz + a^2yz - vy(x + y + z) = 0 \quad (v \in \mathbb{R})$$

imponiendo que sea tangente en el punto C a la recta BC , obtenemos que $v = a^2$, por lo que la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto A y es tangente a la recta BC en el punto C es:

$$c^2xy + b^2xz + a^2yz - a^2y(x + y + z) = 0$$

siendo su centro (conjugado de la recta del infinito) el punto:

$$Q_c = (2a^2b^2 : -b^2(a^2 + b^2 - c^2) : b^2(a^2 + c^2) - (a^2 - c^2)^2)$$

y, por tanto:

$$r_c^2 = AQ_c^2 = \frac{a^2b^4}{4S^2} \Rightarrow r_c = \frac{ab^2}{2S}$$

TRIÁNGULOS CABRI

Una vez aclarado esto:

① Si $r_b^2 + r_c^2 = BC^2$, entonces:

$$0 = \frac{a^2 c^4}{4S^2} + \frac{a^2 b^4}{4S^2} - a^2 = \frac{a^2(a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2c^2 - b^2c^2 + c^4)}{4S^2}$$

Además, considerando el sistema de referencia cartesiano de ejes rectangulares con origen en el punto medio M del segmento BC y eje de abscisas en la recta BC y tomando como unidad de medida la semilongitud del segmento BC , si $A = (x, y)$ ($y \neq 0$), como:

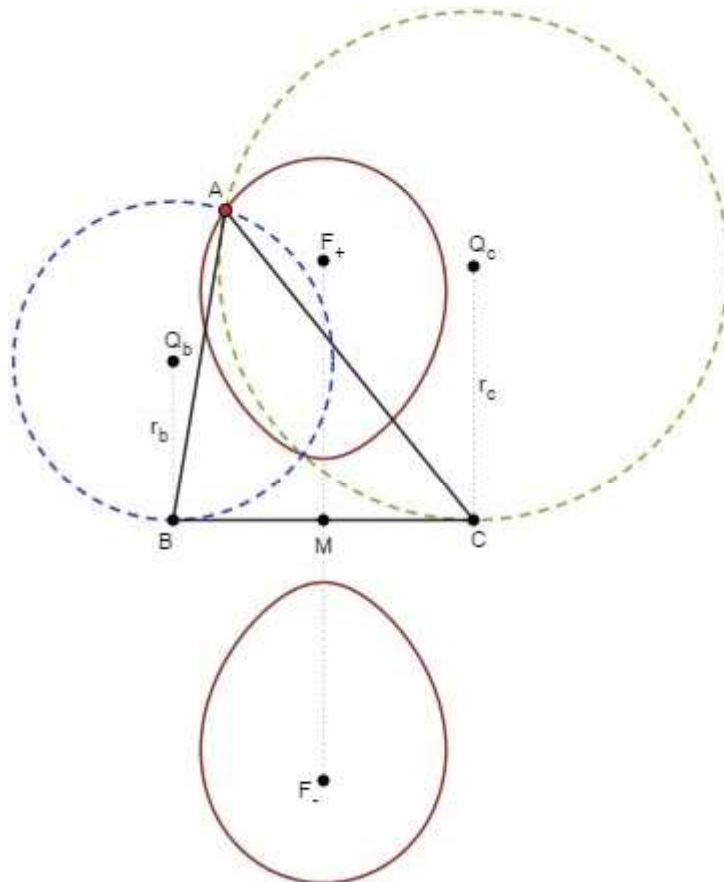
$$\begin{cases} C = (1, 0) \\ B = (-1, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = BC = 2 \\ b = AC = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \\ c = AB = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \end{cases}$$

entonces:

$$(x^2 + y^2)^2 = 6(y^2 - x^2) - 1$$

$$(x^2 + y^2)^2 = 2(\sqrt{3})^2(y^2 - x^2) + (2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^4$$

por lo que el lugar geométrico pedido es el óvalo de Cassini cuyos focos son los puntos situados sobre la recta mediatriz del segmento BC a distancia $\frac{\sqrt{3} BC}{2}$ y cuyo producto de distancias es igual a $\sqrt{2} BC$.



TRIÁNGULOS CABRI

② Si $r_b r_c = BC^2$, entonces:

$$0 = \frac{ac^2}{2S} \frac{ab^2}{2S} - a^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{4S^2} - a^2 = \frac{a^2(a^4 - 2a^2 b^2 - 2a^2 c^2 - 2b^2 c^2 + 2c^4)}{4S^2}$$

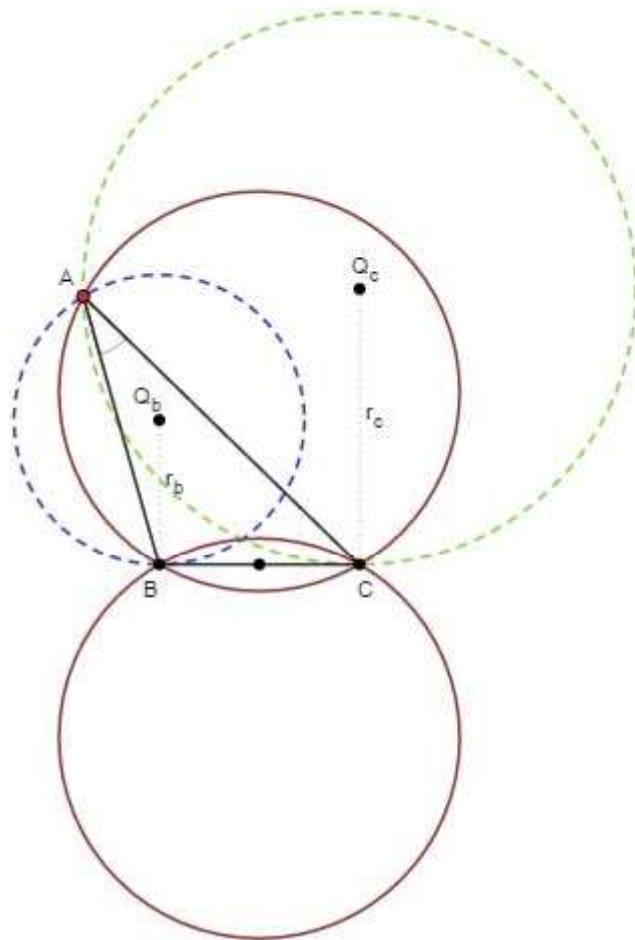
Además, considerando el sistema de referencia cartesiano de ejes rectangulares con origen en el punto medio M del segmento BC y eje de abscisas en la recta BC y tomando como unidad de medida la semilongitud del segmento BC , si $A = (x, y)$ ($y \neq 0$), como:

$$\begin{cases} C = (1, 0) \\ B = (-1, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = BC = 2 \\ b = AC = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \\ c = AB = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \end{cases}$$

entonces:

$$0 = x^4 + y^4 + 2x^2 y^2 - 2x^2 - 14y^2 + 1 = [x^2 + (y - \sqrt{3})^2 - 4][x^2 + (y + \sqrt{3})^2 - 4]$$

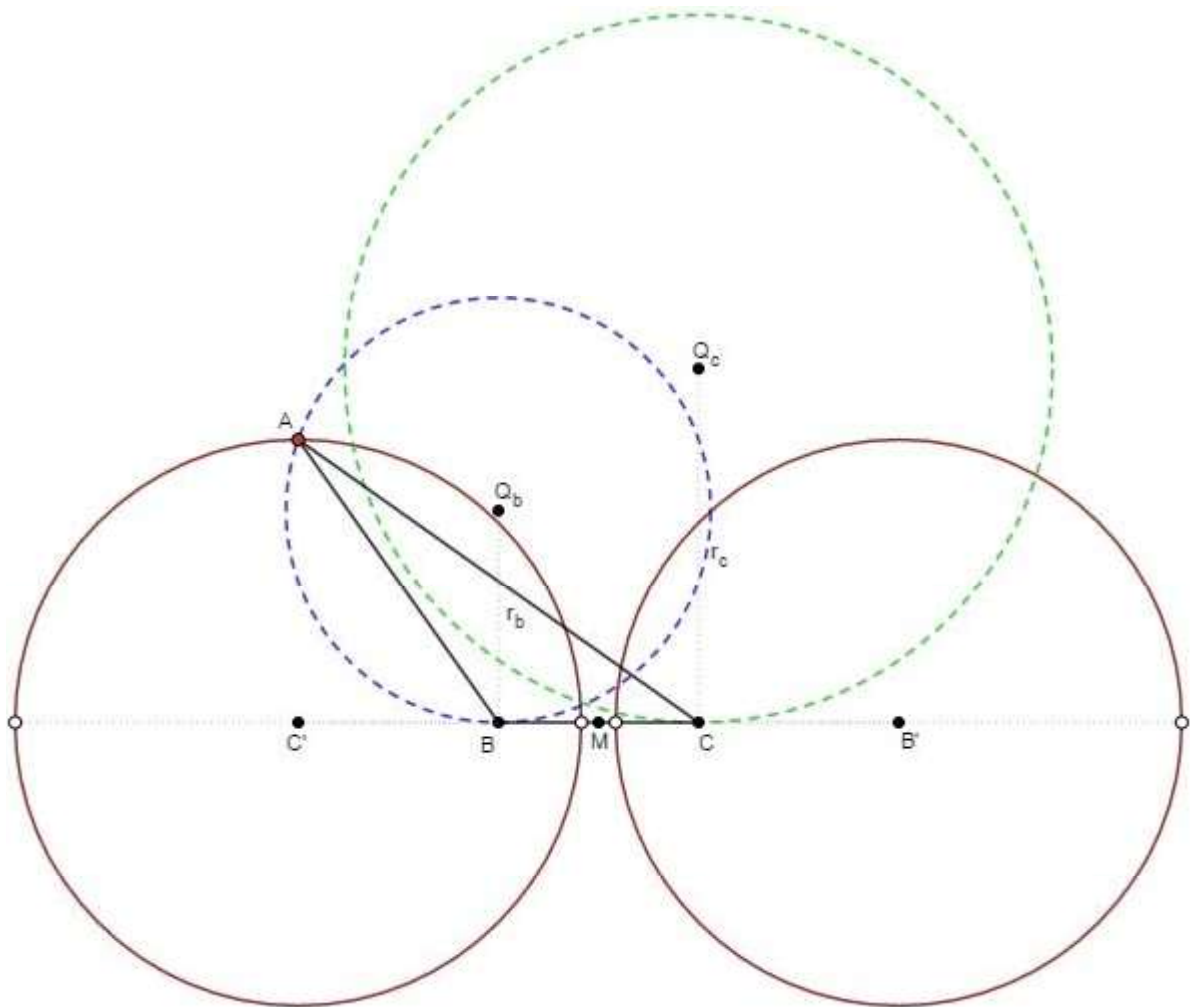
por lo que el lugar geométrico pedido es la unión entre las dos circunferencias que forman los arcos capaces de ángulos $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{5\pi}{6}$ del segmento BC .



TRIÁNGULOS CABRI

③ Si $\frac{r_b}{r_c} = BC$ ó $\frac{r_c}{r_b} = BC$ entonces:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{\frac{ac^2}{2S}}{\frac{ab^2}{2S}} - a = \frac{c^2}{b^2} - a \Rightarrow c^2 = ab^2 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{ó} \\ 0 = \frac{\frac{ab^2}{2S}}{\frac{ac^2}{2S}} - a = \frac{b^2}{c^2} - a \Rightarrow b^2 = ac^2 \end{array} \right.$$



Además, considerando el sistema de referencia cartesiano de ejes rectangulares con origen en el punto medio M del segmento BC y eje de abscisas en la recta BC y tomando como unidad de medida la semilongitud del segmento BC , si $A = (x, y)$ ($y \neq 0$), como:

$$\left\{ \begin{array}{l} C = (1, 0) \\ B = (-1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = BC = 2 \\ b = AC = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \\ c = AB = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \end{array} \right.$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega
16 de junio a 31 de agosto de 2021

TRIÁNGULOS CABRI

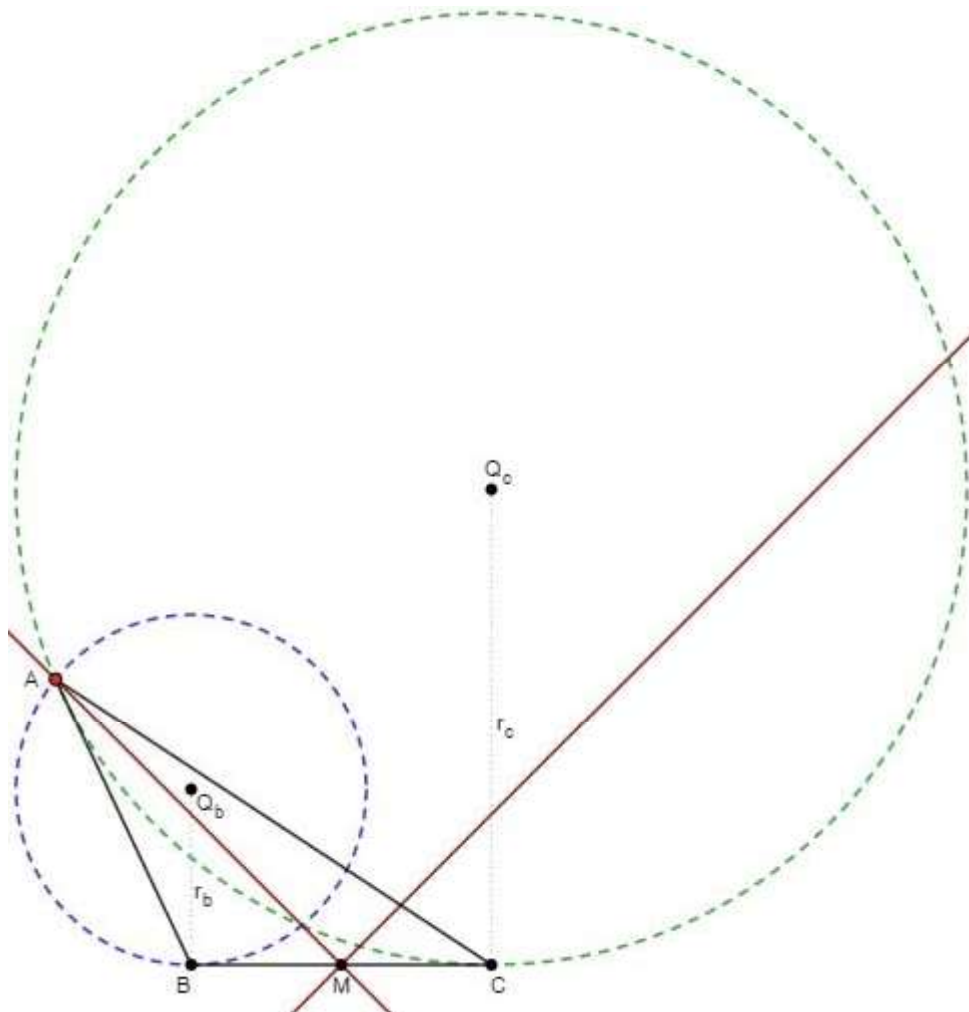
entonces:

$$\begin{cases} (x-3)^2 + y^2 = 8 \\ (x+3)^2 + y^2 = 8 \end{cases}$$

por lo que el lugar geométrico pedido es la unión entre las dos circunferencias centradas en los puntos B' y C' simétricos de B respecto de C y de C respecto de B , respectivamente, y cuyo radio es igual a $\sqrt{2} BC$, exptuando sus puntos de intersección con la recta BC , ya que para estos puntos no tendríamos un triángulo.

④ Si $|r_b - r_c| = BC$, entonces:

$$\begin{aligned}
0 &= (r_b - r_c)^2 - a^2 \\
&= r_b^2 + r_c^2 - 2r_b r_c - a^2 \\
&= \frac{a^2 c^4}{4S^2} + \frac{a^2 b^4}{4S^2} - 2 \left(\frac{ac^2}{2S} \frac{ab^2}{2S} \right) - a^2 \\
&= \frac{a^2(a^4 - 2a^2b^2 + 2b^4 - 2a^2c^2 - 4b^2c^2 + 2c^4)}{4S^2}
\end{aligned}$$



Miguel-Ángel Pérez García-Ortega
16 de junio a 31 de agosto de 2021

TRIÁNGULOS CABRI

Además, considerando el sistema de referencia cartesiano de ejes rectangulares con origen en el punto medio M del segmento BC y eje de abscisas en la recta BC y tomando como unidad de medida la semilongitud del segmento BC , si $A = (x, y)$ ($y \neq 0$), como:

$$\begin{cases} C = (1, 0) \\ B = (-1, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = BC = 2 \\ b = AC = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \\ c = AB = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \end{cases}$$

entonces:

$$0 = 16(x^2 - y^2) = 16(x-y)(x+y)$$

por lo que el lugar geométrico pedido es la unión entre las dos rectas que pasan por el punto medio del segmento BC y forman con éste ángulos de $\frac{\pi}{4}$, exceptuando su punto de intersección con la recta BC , ya que para este punto no tendríamos un triángulo.