

TRIÁNGULOS CABRI

Problema 1004. (De León, M. y Timón, A. (2017): La engañosa sencillez de los triángulos. Colección Miradas Matemáticas) Dado un triángulo ABC , se consideran los segundos puntos de intersección A' , B' y C' entre su circunferencia circunscrita y las medianas correspondientes a los vértices A , B y C , respectivamente. A continuación, se considera el triángulo DEF definido por las rectas tangentes a dicha circunferencia en los vértices del triángulo ABC , de forma que el punto D es opuesto al punto A , el punto E es opuesto al punto B y el punto F es opuesto al punto C . Probar que las rectas $A'D$, $B'E$ y $C'F$ son concurrentes en el punto de Exeter del triángulo ABC .

Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC , como la ecuación de su circunferencia circunscrita es:

$$c^2xy + b^2xz + a^2yz = 0$$

entonces, las ecuaciones de sus rectas tangentes en los puntos A , B y C son:

$$\begin{cases} t_a \equiv 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 0 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c^2y + b^2z \\ t_b \equiv 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 0 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c^2x + a^2z \\ t_c \equiv 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 0 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b^2x + a^2y \end{cases}$$

por lo que:

$$\begin{cases} D = t_b \cap t_c = (-a^2 : b^2 : c^2) \\ E = t_c \cap t_a = (a^2 : -b^2 : c^2) \\ F = t_a \cap t_b = (a^2 : b^2 : -c^2) \end{cases}$$

Además, como las ecuaciones de las medianas correspondientes a los vértices A , B y C del triángulo ABC son:

$$\begin{cases} m_a \equiv 0 = y - z \\ m_b \equiv 0 = x - z \\ m_c \equiv 0 = x - y \end{cases}$$

entonces:

$$\begin{cases} A' = m_a \cap \odot ABC = (-a^2 : b^2 + c^2 : b^2 + c^2) \\ B' = m_b \cap \odot ABC = (a^2 + c^2 : -b^2 : a^2 + c^2) \\ C' = m_c \cap \odot ABC = (a^2 + b^2 : a^2 + b^2 : -c^2) \end{cases}$$

TRIÁNGULOS CABRI

por lo que:

$$\begin{cases} A'D \equiv 0 = (b^4 - c^4)x + a^2b^2y - a^2c^2z \\ B'E \equiv 0 = a^2b^2x + (a^4 - c^4)y - b^2c^2z \\ C'F \equiv 0 = a^2c^2x - b^2c^2y + (a^4 - b^4)z \end{cases}$$

siendo:

$$\begin{vmatrix} b^4 - c^4 & a^2b^2 & -a^2c^2 \\ a^2b^2 & a^4 - c^4 & -b^2c^2 \\ a^2c^2 & -b^2c^2 & a^4 - b^4 \end{vmatrix} = 0$$

por lo que estas tres rectas son concurrentes en el punto:

$$X_{22} = (a^2(-a^4 + b^4 + c^4) : b^2(a^4 - b^4 + c^4) : c^2(a^4 + b^4 - c^4))$$

