TRIÁNGULOS CABRI

Problema 1004. (De León, M. y Timón, A. (2017): La engañosa sencillez de los triángulos. Colección Miradas Matemáticas) Dado un triángulo ABC, se consideran los segundos puntos de intersección A', B' y C' entre su circunferencia circunscrita y las medianas correspondientes a los vértices A, B y C, respectivamente. A continuación, se considera el triángulo DEF definido por las rectas tangentes a dicha circunferencia en los vértices del triángulo ABC, de forma que el punto D es opuesto al punto D0 es opuesto al punto D1 es opuesto al punto D2. Probar que las rectas D3 D4 y D5 son concurrentes en el punto de Exeter del triángulo D6.

Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, como la ecuación de su circunferencia circunscrita es:

$$c^2xy + b^2xz + a^2yz = 0$$

entonces, las ecuaciones de sus rectas tangentes en los puntos A, B y C son:

$$\begin{cases} t_{a} \equiv 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c^{2} & b^{2} \\ c^{2} & 0 & a^{2} \\ b^{2} & a^{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c^{2}y + b^{2}z \\ t_{b} \equiv 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c^{2} & b^{2} \\ c^{2} & 0 & a^{2} \\ b^{2} & a^{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c^{2}x + a^{2}z \\ t_{c} \equiv 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c^{2} & b^{2} \\ c^{2} & 0 & a^{2} \\ b^{2} & a^{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b^{2}x + a^{2}y \end{cases}$$

por lo que:

$$\begin{cases}
D = t_b \cap t_c = (-a^2 : b^2 : c^2) \\
E = t_c \cap t_a = (a^2 : -b^2 : c^2) \\
F = t_a \cap t_b = (a^2 : b^2 : -c^2)
\end{cases}$$

Además, como las ecuaciones de las medianas correspondientes a los vértices A, B y C del triángulo ABC son:

$$\begin{cases} m_a \equiv 0 = y - z \\ m_b \equiv 0 = x - z \\ m_c \equiv 0 = x - y \end{cases}$$

entonces:

$$\begin{cases} A' = m_a \cap \odot ABC = (-a^2 : b^2 + c^2 : b^2 + c^2) \\ B' = m_b \cap \odot ABC = (a^2 + c^2 : -b^2 : a^2 + c^2) \\ C' = m_c \cap \odot ABC = (a^2 + b^2 : a^2 + b^2 : -c^2) \end{cases}$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega 16 de junio a 31 de agosto de 2021

TRIÁNGULOS CABRI

por lo que:

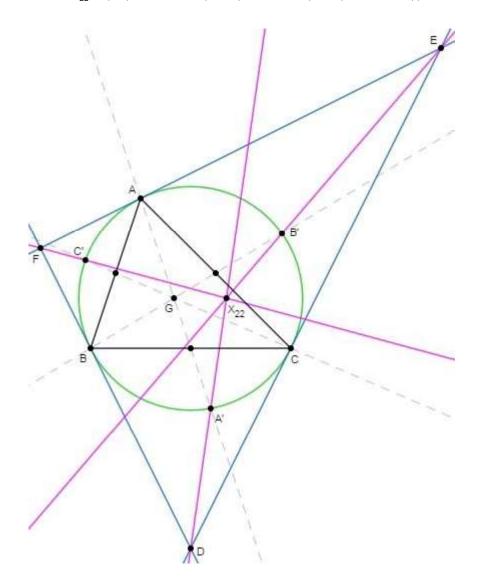
$$\begin{cases} A'D \equiv 0 = (b^4 - c^4)x + a^2b^2y - a^2c^2z \\ B'E \equiv 0 = a^2b^2x + (a^4 - c^4)y - b^2c^2z \\ C'F \equiv 0 = a^2c^2x - b^2c^2y + (a^4 - b^4)z \end{cases}$$

siendo:

$$\begin{vmatrix} b^4 - c^4 & a^2b^2 & -a^2c^2 \\ a^2b^2 & a^4 - c^4 & -b^2c^2 \\ a^2c^2 & -b^2c^2 & a^4 - b^4 \end{vmatrix} = 0$$

por lo que estas tres rectas son concurrentes en el punto:

$$X_{22} = (a^2(-a^4 + b^4 + c^4) : b^2(a^4 - b^4 + c^4) : c^2(a^4 + b^4 - c^4))$$



Miguel-Ángel Pérez García-Ortega 16 de junio a 31 de agosto de 2021