

Problema 1005 (TriangulosCabri. Ricardo Barroso)

Sea ABC un triángulo, P un punto del plano y c una circunferencia con centro en P . Se consideran r_1, r_2 diámetros perpendiculares de c , los puntos A_1, A_2 intersecciones respectivas de tales diámetros con los lados (o sus prolongaciones) que parten del vértice A y los puntos B_1, B_2 intersecciones respectivas de tales diámetros con los lados (o sus prolongaciones) que parten del vértice B . Hallar el lugar geométrico de los puntos X intersección de las rectas A_1A_2 y B_1B_2 .

Propuesto por Antonio Casas Pérez, profesor jubilado del Departamento de Matemática Aplicada al Urbanismo, a la Edificación y al Medio Ambiente, Universidad Politécnica de Madrid

El lugar geométrico pedido es la **cónica $\mathcal{C}_c$** . Ver más abajo.

Renunciamos y cambiamos notaciones

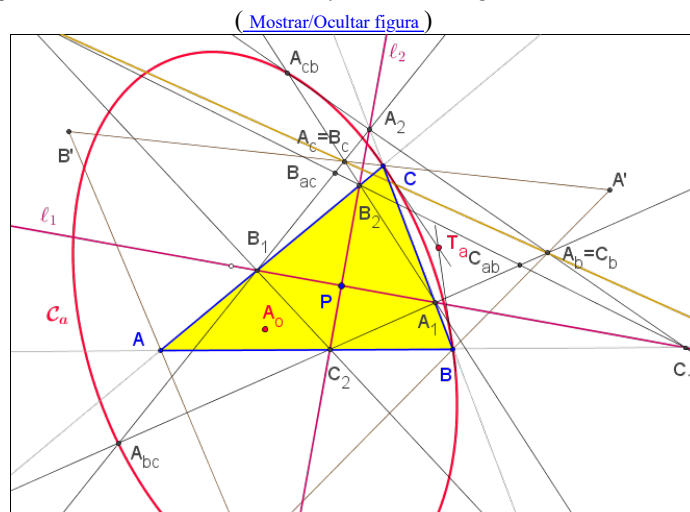
En la versión web, se muestran descripciones de términos y se pueden usar los enlaces:

<https://amontes.webs.ull.es/otrashtm/HGT2021.htm#HG060721>

Dados un triángulo ABC y un punto P , sea $A'B'C'$ su **triángulo anticeviano**. Se toman dos rectas perpendiculares ℓ_1 y ℓ_2 por P . Estas rectas cortan a los lados BC, CA, AB en los puntos A_1 y A_2, B_1 y B_2, C_1 y C_2 , respectivamente. Las rectas determinadas por estos seis puntos se cortan en los siguientes puntos:

$$\begin{array}{llll} A_b = A_1C_2 \cap A_2C_1, & A_c = A_1B_2 \cap A_2B_1, & A_{bc} = A_1C_2 \cap A_2B_1, & A_{cb} = A_1B_2 \cap A_2C_1, \\ B_c = B_2A_1 \cap B_1A_2, & B_a = B_2C_1 \cap B_1C_2, & B_{ca} = B_2A_1 \cap B_1C_2, & B_{ac} = B_2C_1 \cap B_1A_2, \\ C_a = C_2B_1 \cap C_1B_2, & C_b = C_2A_1 \cap C_1A_2, & C_{ab} = C_1B_2 \cap C_2A_1, & C_{ba} = C_1A_2 \cap C_2B_1. \end{array}$$

$B_a = C_a, C_b = A_b$ y $A_c = B_c$ quedan sobre los lados $B'C', C'A'$ y $A'B'$ del triángulo anticeviano de P , respectivamente.



Cuando las rectas ℓ_1 y ℓ_2 giran alrededor de P , los puntos A_{bc} y A_{cb} están en una cónica, $\mathcal{C}_a$, que pasa por B y C . Las tangentes en estos puntos se cortan en T_a (polo de BC). Su centro se denota por A_0 .

Si $(u:v:w)$ son las coordenadas baricéntricas de P ,

$$\mathcal{C}_a: v w (u (b^2 (u+v-w)+c^2 (u-v+w))-a^2 (u^2+2 v w+u (v+w)))x^2 + u^2 (u (b^2 (u+v-w)+c^2 (u-v+w))-a^2 (u^2+2 v w+u (v+w)))y z - 2 u w (-c^2 u v+b^2 u (u+v)+a^2 v (u+v))z x - 2 u v (-b^2 u w+c^2 u (u+w)+a^2 w (u+w))x y = 0.$$

$$T_a = (u (-u (b^2 (u+v-w)+c^2 (u-v+w))+a^2 (u^2+2 v w+u (v+w))) : -2 (-c^2 u v+b^2 u (u+v)+a^2 v (u+v)) w : -2 v (-b^2 u w+c^2 u (u+w)+a^2 w (u+w))).$$

$$\begin{aligned} A_0 = & (u ((-b^2-c^2) u^2+a^2 (u^2-2 v w)) (-u (b^2 (u+v-w)+c^2 (u-v+w))+a^2 (u^2+2 v w+u (v+w))) : \\ & 2 w (a^4 v (u^2+2 u v+2 v^2) w-a^2 u (c^2 v (u v+2 u w+2 v w)+b^2 (u^3+2 u^2 v+u v^2-2 v^2 w))+u^2 (c^4 v (v+w)+b^2 c^2 (u^2-2 u v-2 v (v+w))+b^4 (u^2+2 u v+v (v+w)))) : \\ & 2 v (a^4 v w (u^2+2 u w+2 w^2)-a^2 u (b^2 w (2 u v+u w+2 v w)+c^2 (u^3+2 u^2 w+u w^2-2 v w^2))+u^2 (b^4 w (v+w)+b^2 c^2 (u^2-2 u w-2 w (v+w))+c^4 (u^2+2 u w+w (v+w))))). \end{aligned}$$

Las cónicas $\mathcal{C}_b, \mathcal{C}_c$, los polos T_b, T_c y sus centros B_0, C_0 se obtienen cíclicamente.

★ Las rectas AA_0, BB_0, CC_0 concurren si y solo si P está sobre la curva algebraica de grado 11:

$$\mathfrak{S}_{abcxyz} y z (2 (b^2-c^2) (-a^2+b^2+c^2) (a^4+b^4-5 b^2 c^2+c^4+a^2 (-2 b^2-2 c^2)) x^5 y^2 z^2 -(b^2-c^2) (-4 a^6+b^6-b^4 c^2-b^2 c^4+c^6+a^4 (9 b^2+9 c^2)+a^2 (-6 b^4-4 b^2 c^2-6 c^4)) x^3 y^3 z^3-2 a^4 (b^2-c^2) (-a^2+b^2+c^2) x y^4 z^4-2 b^2 c^2 (-a^2+b^2+c^2) x^7 (-c y+b z) (c y+b z)-2 a^6 y^4 z^4 ((a^2-b^2+c^2) y+(-a^2-b^2+c^2) z)+x^6 y z (c^2 (a^6+a^4 (-4 b^2-3 c^2)-(b^2-c^2) (2 b^4+3 b^2 c^2-c^4))+a^2 (5 b^4+3 c^4)) y-b^2 (a^6+a^4 (-3 b^2-4 c^2)-(b^2-c^2) (b^4-3 b^2 c^2-2 c^4))+a^2 (3 b^4+5 c^4)) z)+x^5 y z (c^2 (2 a^6+a^4 (-7 b^2-5 c^2)-(b^2-c^2) (3 b^4-c^4))+2 a^2 (4 b^4-b^2 c^2+2 c^4)) y^2-$$

$$b^2 (2 a^6 + a^4 (-5 b^2 - 7 c^2) - (b^2 - c^2) (b^4 - 3 c^4) + 2 a^2 (2 b^4 - b^2 c^2 + 4 c^4)) z^2 - 2 x^6 (c^4 (a^4 - b^4 - 2 a^2 c^2 + 2 b^2 c^2 + c^4) y^3 - b^4 (a^4 - 2 a^2 b^2 + b^4 + 2 b^2 c^2 - c^4) z^3) = 0,$$

con puntos cuádruples en los vértices de ABC y que pasa por los centros X_2 (baricentro), X_{13} , X_{14} (puntos de Fermat), X_{110} (foco de la **parábola de Kiepert**), X_{39162} , X_{39163} (focos de la **elipse inscrita de Steiner**).

- Cuando P es el baricentro, el punto de concurrencia de las rectas AA_0 , BB_0 , CC_0 es:

$$P_2 = (25 a^8 - 35 a^6 (b^2 + c^2) + 3 a^4 (15 b^4 - 7 b^2 c^2 + 15 c^4) + a^2 (-29 b^6 + 15 b^4 c^2 + 15 b^2 c^4 - 29 c^6) + 10 b^8 - 35 b^6 c^2 + 54 b^4 c^4 - 35 b^2 c^6 + 10 c^8 : \dots : \dots),$$

que tiene números de búsqueda en [ETC\[1-41224\]](#) (-0.774039984833567, -0.812449860198048, 4.56037899350621).

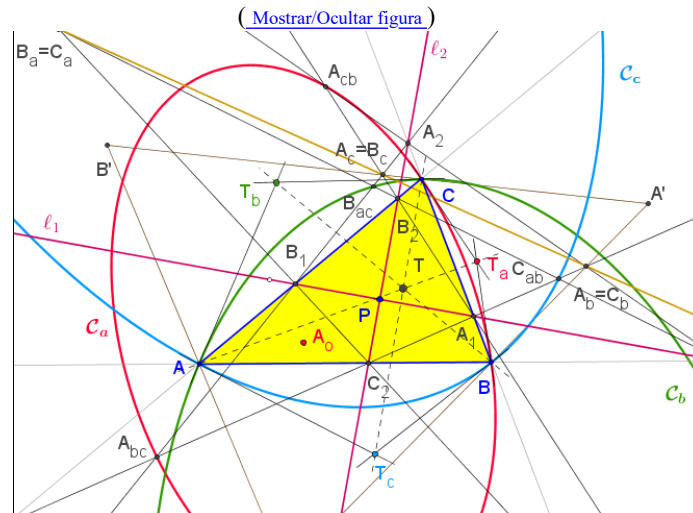
Es la **reflexión de X_{99} (punto de Steiner) en $X_{11147} = ((S_A - 2a^2)(5S_A - a^2) : \dots : \dots)$** (centro de perspectividad de los triángulos medial y anti-Artzt).

Es el punto de intersección de las rectas $X_i X_j$ s.e.u.o., para los índices $\{i, j\}$: {2,5477}, {4,6055}, {76,7610}, {99,5485}, {230,671}, {262,14848}, {485,13681}, {486,13801}, {524,8781}, {542,7612}, {543,2996}, {598,14061}, {1916,8859}, {3566,9180}, {5182,15597}, {5395,14971}, {5466,9123}, {5503,22329}, {6036,14494}, {6054,7607}, {8593,37637}, {8860,11167}, {10302,11168}, {11170,12150}, {13908,33342}, {13968,33343}, {18800,23053}, {19661,38224}, {38259,41135}.

- Si P es el foco de la parábola de Kiepert, el punto de concurrencia de las rectas AA_0 , BB_0 , CC_0 es [X₁₄₂₂₁](#).

- ★ Las rectas AT_a , AT_b y AT_c concurren en:

$$T = (1/(u(c^2 v^2 - a^2 v w + b^2 v w + c^2 v w + b^2 w^2)) : \dots : \dots).$$



{1113, 15164}, {1114, 15165}, {1290, 35156}, {1296, 35179}, {1297, 35140}, {1304, 16077}, {1308, 35171}, {1379, 6190}, {1380, 6189}, {1477, 35160}, {2222, 35174}, {2249, 35145}, {2291, 1121}, {2380, 11117}, {2381, 11118}, {2382, 18822}, {2384, 35168}, {2699, 35151}, {2700, 35150}, {2701, 35154}, {2702, 35148}, {2703, 35147}, {2708, 35149}, {2711, 35152}, {2712, 35153}, {2715, 2966}, {2717, 35164}, {2718, 35175}, {3563, 35142}, {3565, 35136}, {4588, 4597}, {5970, 35146}, {5994, 23896}, {5995, 23895}, {6551, 6635}, {7953, 35137}, {8652, 32042}, {8687, 6648}, {8691, 35181}, {8693, 32041}, {8701, 6540}, {9111, 35172}, {9136, 9487}, {9150, 886}, {10420, 18878}, {11636, 35138}, {14733, 35157}, {16806, 32036}, {16807, 32037}, {26716, 32040}, {28317, 35170}, {28471, 35141}, {28482, 35162}, {30664, 41072}, {32693, 32038}, {35105, 35143}, {35106, 35144}, {35107, 35155}, {35108, 35159}, {39625, 39626}, {40302, 40301}.

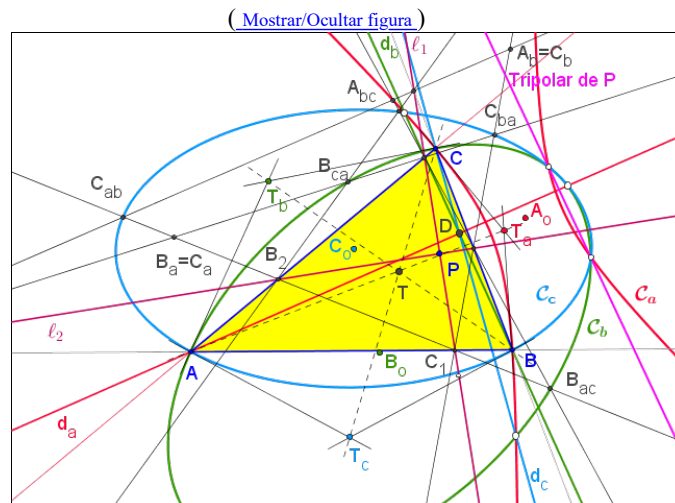
★ Los tres haces de cónicas generados por $\{C_b, C_c\}$, $\{C_c, C_a\}$, $\{C_a, C_b\}$ tienen una cónica degenerada de la que forma parte la **tripolar** de P y la recta d_a , correspondiente al haz determinado por C_b y C_c , que pasa por A y su ecuación es:

$$d_a: w^2(-a^2 v(u+v-w)-c^2 v(-u+v+w)+b^2(v(v+w)+u(v+2w))) - v^2(-w(a^2(u-v+w)+b^2(-u+v+w))+c^2(w(v+w)+u(2v+w)))z = 0.$$

Sean d_b y d_c las correspondientes rectas en los haces restantes.

Las rectas d_a , d_b y d_c concurren en:

$$D = (u^2/((a^2-b^2-c^2)u^2+(a^2-b^2+c^2)u v+(a^2+b^2-c^2)u w+2a^2 v w) : \dots : \dots).$$



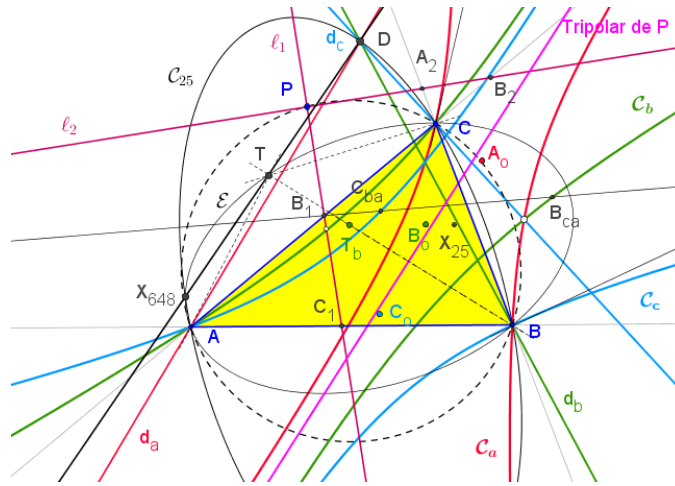
Cuando P está sobre la circunferencia circumsrita, D es el **producto baricéntrico**, $X_{4 \times P}$, del ortocentro y P . Está sobre la cónica circumsrita, C_{25} , de perspector X_{25} , polo del **eje órtico** respecto a la circunferencia circumsrita.

Algunos pares $\{P=X_i, D=X_j\}$, con P no situado sobre la circunferencia circumsrita, para los pares $\{i, j\}$: {1, 9}, {2, 5485}, {4, 393}, {13, 13}, {14, 14}, {30, 3163}, {80, 36910}, {511, 11672}, {512, 1084}, {513, 1015}, {514, 1086}, {515, 23986}, {516, 23972}, {517, 23980}, {518, 6184}, {519, 4370}, {520, 35071}, {521, 35072}, {522, 1146}, {523, 115}, {524, 2482}, {525, 15526}, {526, 18334}, {527, 35110}, {528, 35113}, {536, 13466}, {537, 35123}, {538, 35073}, {542, 23967}, {543, 35087}, {545, 35121}, {690, 23992}, {726, 20532}, {740, 35068}, {758, 35069}, {804, 35078}, {812, 35119}, {826, 15449}, {834, 39016}, {888, 39010}, {891, 39011}, {900, 35092}, {918, 35094}, {924, 39013}, {926, 39014}, {928, 39017}, {1499, 35133}, {1503, 23976}, {1510, 39018}, {2574, 15166}, {2575, 15167}, {2783, 35083}, {2784, 35082}, {2785, 35086}, {2786, 35080}, {2787, 35079}, {2792, 35081}, {2795, 35084}, {2796, 35085}, {2799, 35088}, {2801, 35116}, {2802, 35129}, {3413, 39023}, {3414, 39022}, {3564, 35067}, {3566, 15525}, {3667, 40621}, {3738, 35128}, {3887, 35125}, {3900, 35508}, {3906, 17416}, {4083, 40610}, {4160, 35135}, {4715, 35124}, {4977, 35076}, {5845, 35093}, {5853, 35111}, {5969, 35077}, {6366, 35091}, {6368, 39019}, {6371, 39015}, {7927, 15527}, {8057, 39020}, {8674, 35090}, {8680, 35075}, {9033, 39008}, {9055, 35126}, {17430, 17429}, {17768, 35066}, {17770, 35114}, {35101, 35070}, {35102, 35074}, {35103, 35089}, {35104, 35095}.

Y cuando P está sobre la circunferencia circumsrita, $D=H \times P$, $\{i, j\}$: {74, 8749}, {98, 6531}, {99, 648}, {100, 1783}, {101, 8750}, {105, 8751}, {106, 8752}, {107, 6529}, {109, 32674}, {110, 112}, {111, 8753}, {112, 32713}, {934, 32714}, {1304, 32695}, {1310, 36099}, {2715, 32696}, {2720, 32702}, {6099, 32698}, {10420, 32708}, {10425, 32697}, {35182, 32699}, {35183, 32700}, {35184, 32701}, {35185, 32703}, {35186, 32705}, {35187, 32707}, {35188, 32709}, {35189, 32711}.

• Cuando P recorre la circunferencia circumsrita, las rectas DT pasan por un punto fijo, **cuarto punto** de intersección de la elipse circumsrita de Steiner $\mathcal{E}$ y la cónica circumsrita C_{25} de perspector X_{25} , X_{648} (**tripolo** de la **recta de Euler**). X_{648} también es el perspector de la parábola inscrita de foco X_{112} (punto de intersección de las reflexiones en los lados de ABC de la recta que pasa por el ortocentro y el **simedian**). El punto D coincide con X_{648} cuando P es el **punto de Steiner**.

(Mostrar/Ocultar figura)



★ La envolvente de la recta $A_bB_cC_a$, cuando las rectas ℓ_1 y ℓ_2 gira alrededor de P , es una cónica inscrita en el triángulo anticeviano $A'B'C'$ de P . Su ecuación es:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{abcxyz} & (c^2 v (u v + w (v + w)) + w (a^2 v (v - w) - b^2 (v^2 + (u + v) w)))^2 x^2 + 2 (a^4 v w (u^3 (u + v) + u (u^2 + u v - v^2) w - v (u + v) \\ & w^2) + u^2 (b^4 w (u v (u + v) + (u^2 + u v + v^2) w - u w^2) + c^4 v (u (u - v) v + u (u + v) w + (u + v) w^2) + b^2 c^2 (-2 v^2 w^2 + u (v + w) \\ & (v^2 - 3 v w + w^2) + u^2 (v^2 + v w + w^2))) - a^2 u (b^2 w (v^2 w (-v + w) + u^3 (2 v + w) + u v w (2 v + 3 w) + u^2 (2 v^2 + 2 v \\ & w + w^2)) + c^2 v (v (v - w) w^2 + u^3 (v + 2 w) + u v w (3 v + 2 w) + u^2 (v^2 + 2 v w + 2 w^2))) y z = 0. \end{aligned}$$

En particular, cuando P es el foco de la **parábola de Kiepert**, la cónica es la **polar recíproca** de la **circunferencia de los nueve puntos** con respecto a la **hipérbola de Stammler**. Cuyo centro es [X34968](#)