

Propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega, profesor de Matemáticas en el IES "Bartolomé-José Gallardo" de Campanario (Badajoz)
Problema 1006

Para un triángulo ABC, se consideran los centros de las circunferencias Q_b y Q_c que pasan por el punto A y son tangentes a la recta BC en los puntos B y C, respectivamente.

Determinar el lugar geométrico que debe describir el punto A para que: $Q_b Q_c$ sea paralela a AB o $Q_b Q_c$ sea paralela a AC

Pérez, M. A. (2021): Comunicación personal.

Solución Antonio Casas Pérez, profesor jubilado del Departamento de Matemática Aplicada al Urbanismo, a la Edificación y al Medio Ambiente, Universidad Politécnica de Madrid

Podemos suponer $B=(0,0)$ y BC el eje OX . Tendremos $C=(c,0)$

La circunferencia que pasa por B y es tangente al eje OX en B , tiene su centro en un punto del eje OY , si éste es $(0,r)$, la ecuación de esta circunferencia será

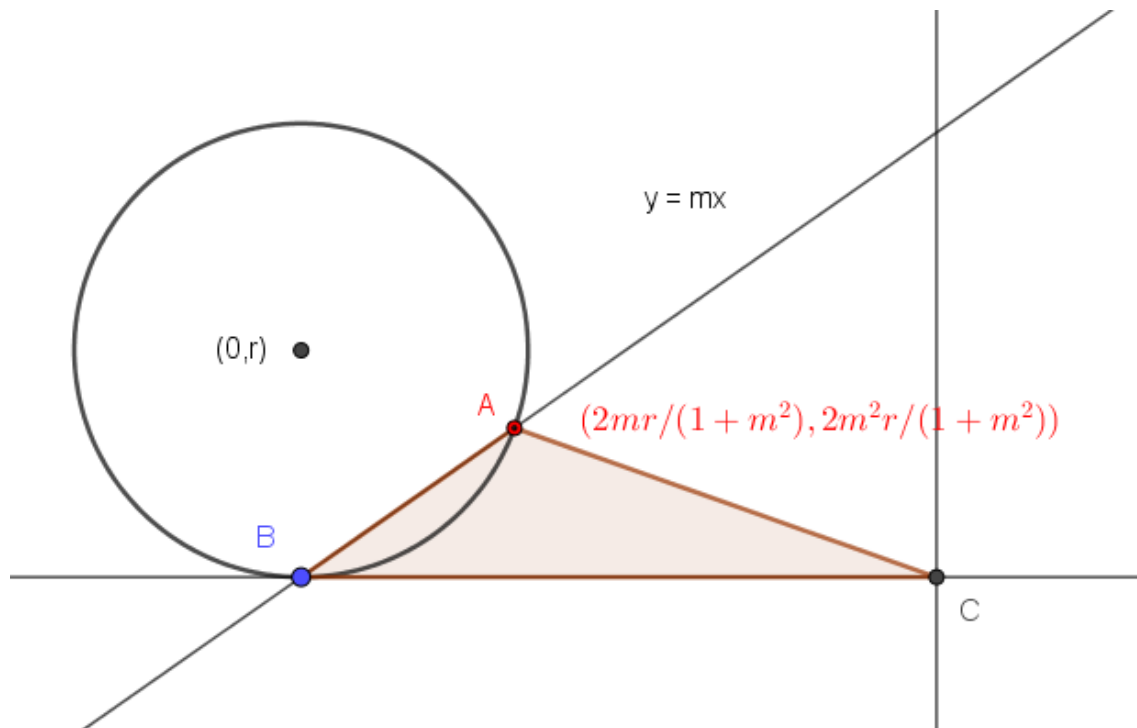
$$x^2 + y^2 - 2yr = 0$$

Para este valor de r , los puntos A que solucionan el problema, son puntos de esta circunferencia y por tanto puntos intersección de ésta con rectas adecuadas que pasen por B , esto es, los puntos A se obtienen como solución del sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2yr = 0 \\ y = mx \end{cases}$$

Tendremos

$$\begin{cases} x = \frac{2mr}{1+m^2} \\ y = \frac{2m^2r}{1+m^2} \end{cases}$$



El centro del círculo que pasa por **A** y **C** y es tangente al eje **OX** en **C** es la intersección de la mediatriz de **AC** con la perpendicular al eje **OX** por **C**.

Si **x,y** son sus coordenadas, entonces

$$\begin{cases} (x - c)^2 + y^2 = \left(x - \frac{2mr}{1 + m^2}\right)^2 + \left(y - \frac{2m^2r}{1 + m^2}\right)^2 \\ x = c \end{cases}$$

Este sistema da el valor de las coordenadas de este punto y por tanto la ecuación de la recta que determina él junto con **(0,r)**. La pendiente de dicha recta es pues

$$\frac{cm^2 - 4mr + c}{4m^2r}$$

El valor de **m** debe ser tal que **y=mx** sea paralela a esta recta y así

$$m = \frac{cm^2 - 4mr + c}{4m^2r}$$

Lo que da como valores de **m**

Los puntos **A** que verifican la condición del problema son pues

$$\begin{cases} x = \frac{8r^2c}{16r^2 + c^2} \\ y = \frac{2c^2r}{16r^2 + c^2} \end{cases}$$

Y eliminando r

$$\left(x - \frac{c}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{c^2}{16}$$

Esto es, **A** recorre la circunferencia de centro **(c/4,0)** y radio **c/4**

