TRIÁNGULOS CABRI

Problema 1006. (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Para un triángulo ABC, se consideran los centros Q_b y Q_c de las circunferencias que pasan por el punto A y son tangentes a la recta BC en los puntos B y C, respectivamente. Determinar el lugar geométrico que debe describir el punto A para que:

$$\left\{\begin{array}{c} Q_bQ_c \parallel AB \\ \text{ó} \\ Q_bQ_c \parallel AC \end{array}\right.$$

Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC:

☺ Como la ecuación de una circunferencia general que pasa por los puntos A y B es:

$$c^2xy + b^2xz + a^2yz - wz(x+y+z) = 0 \ (w \in \mathbb{R})$$

imponiendo que sea tangente en el punto B a la recta BC, obtenemos que $w = a^2$, por lo que la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto A y es tangente a la recta BC en el punto B es:

$$c^2xy + b^2xz + a^2yz - a^2z(x+y+z) = 0$$

siendo su centro (conjugado de la recta del infinito) el punto:

$$Q_b = (2a^2c^2 : c^2(a^2+b^2) - (a^2-b^2)^2 : -c^2(a^2-b^2+c^2))$$

☹ Como la ecuación de una circunferencia general que pasa por los puntos A y C es:

$$c^2xy + b^2xz + a^2yz - vy(x+y+z) = 0 \ (v \in \mathbb{R})$$

imponiendo que sea tangente en el punto C a la recta BC, obtenemos que $v = a^2$, por lo que la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto A y es tangente a la recta BC en el punto C es:

$$c^2xy + b^2xz + a^2yz - a^2y(x+y+z) = 0$$

siendo su centro (conjugado de la recta del infinito) el punto:

$$Q_c = (2a^2b^2 : -b^2(a^2+b^2-c^2) : b^2(a^2+c^2) - (a^2-c^2)^2)$$

Por tanto:

$$Q_bQ_c^\infty = (-2b^2 + 2c^2 : -a^2 + 3b^2 + c^2 : a^2 - b^2 - 3c^2)$$

y como:

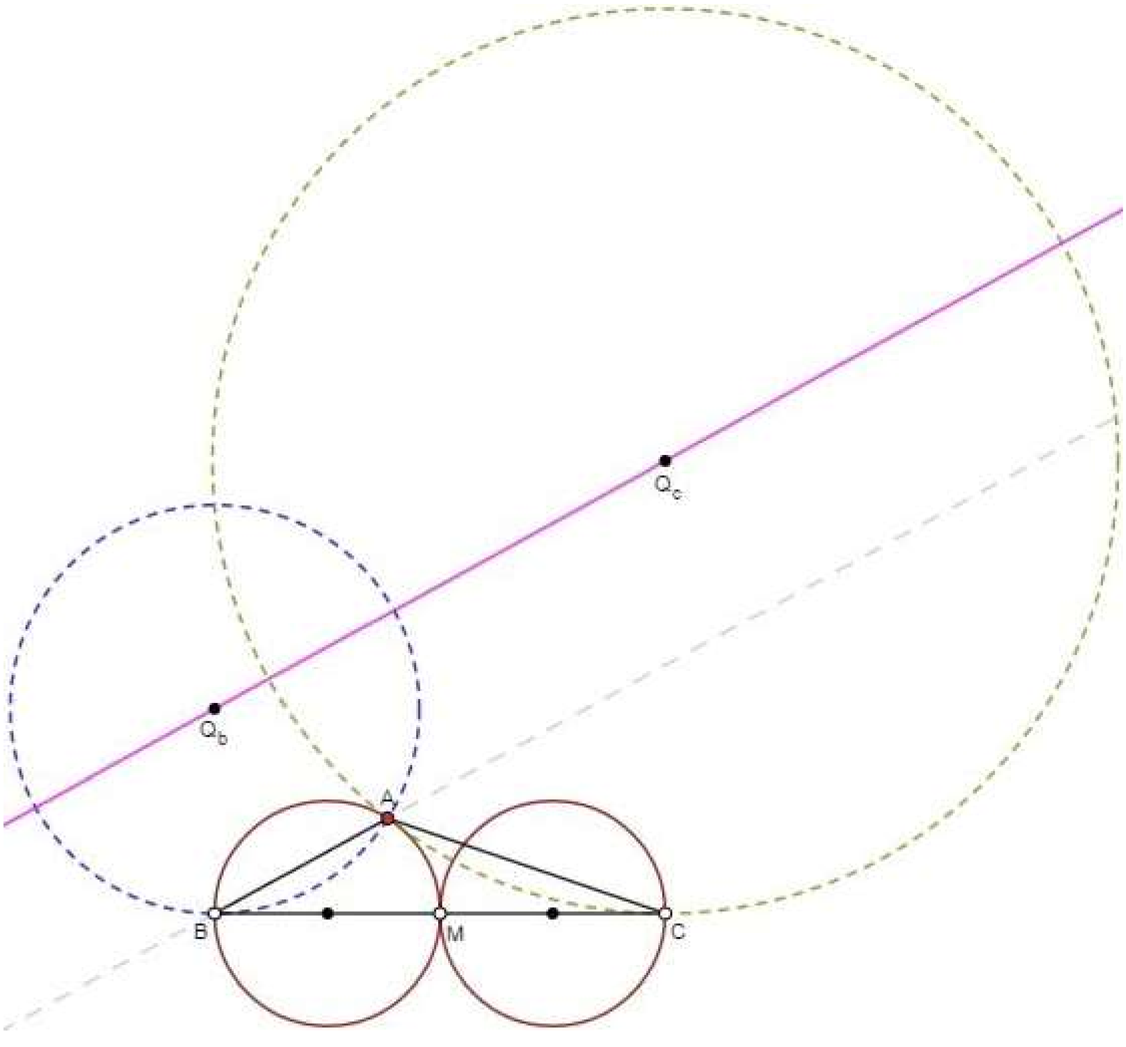
$$\left\{\begin{array}{l} AB^\infty = (1 : -1 : 0) \\ AC^\infty = (1 : 0 : -1) \end{array}\right.$$

entonces:

$$\left\{\begin{array}{c} Q_bQ_c \parallel AB \\ \text{ó} \\ Q_bQ_c \perp AC \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 0 = a^2 - b^2 - 3c^2 \\ \text{ó} \\ 0 = a^2 - 3b^2 - c^2 \end{array}\right.$$

Además, considerando el sistema de referencia cartesiano de ejes rectangulares con origen en el punto medio M del segmento BC y eje de abscisas en la recta BC y tomando como unidad de medida la semilongitud del segmento BC, si $A = (x, y)$ $(y \neq 0)$, como:

$$\left\{\begin{array}{l} C = (1, 0) \\ B = (-1, 0) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = BC = 2 \\ b = AC = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \\ c = AB = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \end{array}\right.$$



entonces:

$$\begin{cases} \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \\ \text{ó} \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

por lo que el lugar geométrico pedido es la unión entre las dos circunferencias con diámetros BM y CM, respectivamente, exceptuando sus puntos de intersección con la recta BC, ya que para estos puntos no tendríamos un triángulo.