TRIÁNGULOS CABRI

Problema 1007. (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dado un triángulo ABC, se considera su excírculo mixtilinear correspondiente al vértice A (excírculo tangente a las rectas AB y AC y al circuncírculo del triángulo ABC). Probar que la recta que pasa por el exincentro I_a del triángulo ABC y es perpendicular a la bisectriz interior (y, por tanto, paralela a la bisectriz exterior) correspondiente al vértice A corta a los lados AC y BC en sus puntos de tangencia con dicho excírculo mixtilinear.

Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC y la inversión con respecto a la circunferencia (A,b), se verifica que:

① La recta AB se mantiene invariante, siendo el punto $B' = (c^2 - b^2 : b^2 : 0)$ la imagen del punto B, por lo que:

$$CB' \equiv b^2 x + (b^2 - c^2)y = 0$$

② La recta AC se mantiene invariante, siendo el punto C un punto fijo.

③ La recta AI_a se mantiene invariante, siendo el punto $I_a' = (c^2 - b^2 + ac : b^2 : bc)$ la imagen del punto $I_a = (-a : b : c)$.

④ La circunferencia (O) circunscrita al triángulo ABC se transforma en la recta $B'C$.

Además, como los puntos pedales del punto I_a' sobre las rectas AC, AB' y $B'C$ son:

$$\begin{cases} V' = (a-b+c : 0 : -a+b+c) \\ W' = (2c^2 - b(-a+b+c) : b(-a+b+c) : 0) \\ U' = ((c^2-b^2)(a-b+c) : b^2(a-b+c) : c^2(a+b-c)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I'V' = \dfrac{b}{2c}\sqrt{\dfrac{(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)}{a+b+c}} \\ I'W' = \dfrac{b}{2c}\sqrt{\dfrac{(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)}{a+b+c}} \\ I'U' = \dfrac{b}{2c}\sqrt{\dfrac{(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)}{a+b+c}} \end{cases}$$

entonces, la circunferencia (I_a') es la circunferencia inscrita al triángulo $AB'C$, cuya imagen por la inversión es la circunferencia (J) exinscrita correspondiente al vértice A del triángulo mixtilinear ABC, siendo los puntos V y W las imágenes de los puntos V' y W', respectivamente, por lo que:

$$\begin{cases} V = (-a+b-c : 0 : 2c) \\ W = (-a-b+c : 2b : 0) \end{cases} \Rightarrow VW \equiv 2bcx + c(a+b-c)y + b(a-b+c)z = 0$$

y verificándose que:

☺ La recta VW pasa por punto I_a, ya que dicho punto verifica su ecuación.

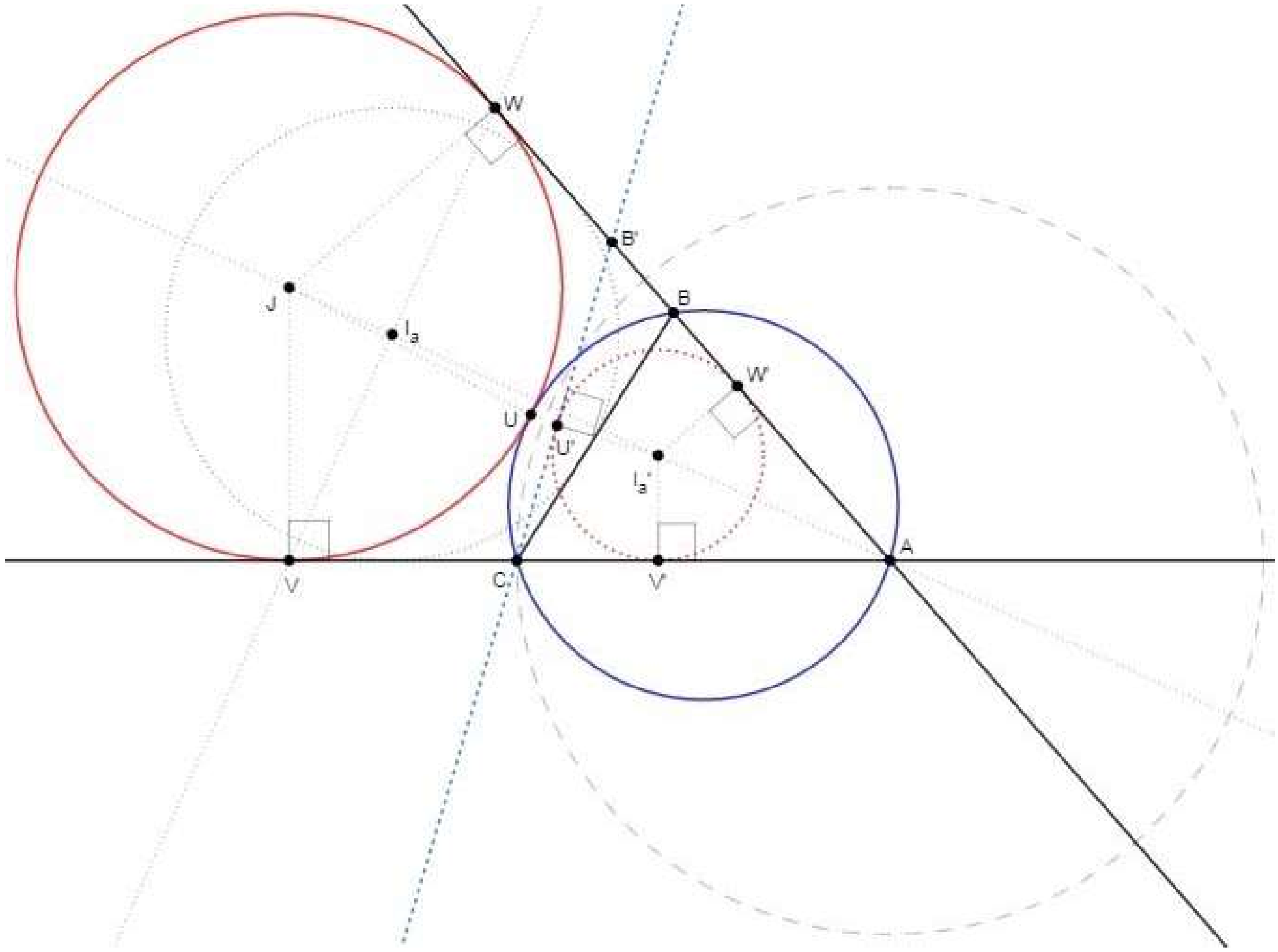
☹ Como:

$$VW_\infty = ((b-c)(-a+b+c) : -b(-a+b+c) : c(-a+b+c)) = (b-c : -b : c) = AI_\infty^\perp$$

entonces, $VW \perp AI.$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega
16 de junio a 31 de agosto de 2021

TRIÁNGULOS CABRI



Miguel-Ángel Pérez García-Ortega
16 de junio a 31 de agosto de 2021