

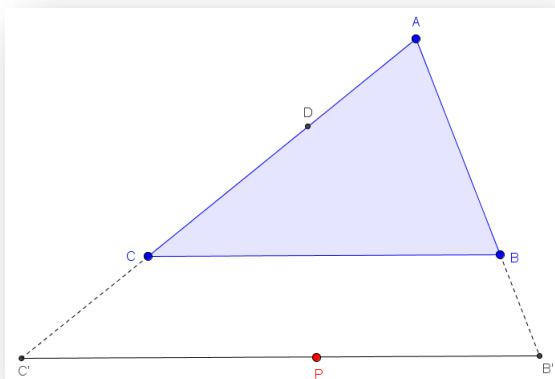
Problema 948.-

Dado un triángulo ABC y un punto cualquiera del plano P, dividir ABC con una recta que pase por P y de forma que el cociente de áreas de las partes obtenidas sea un número positivo dado.

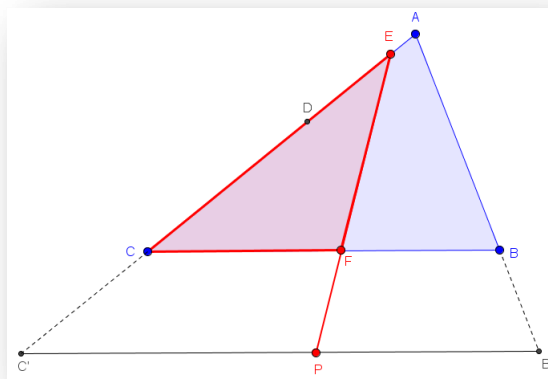
Propuesto por Antonio Casas Pérez, (2020).

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros. Córdoba.

Caso 1: P es un punto exterior al triángulo ABC.



$k = 2$



Siendo P, punto exterior al ΔABC , trazamos una paralela por P a uno de los lados. Sea en este caso, $B'C'$.

Determinamos sobre el lado CA el punto D de modo que se verifique $C'P \cdot CD = \frac{1}{k} \cdot CB \cdot CA$.

Sea ahora el punto E sobre el lado AC de modo que el segmento EP determine el ΔCEF de modo que $[\Delta CEF] = \frac{1}{k} \cdot [\Delta ABC]$.

Para que esto suceda debe verificarse que $\frac{[\Delta CEF]}{[\Delta ABC]} = \frac{CF \cdot CE}{CB \cdot CA} = \frac{1}{k}$

Ahora bien,

$$CF \cdot CE = \frac{C'P \cdot CE}{C'E} \cdot CE = \frac{C'P}{C'E} \cdot (CD + DE) \cdot (C'E - C'C) = \frac{C'P}{C'E} \cdot (CD \cdot C'E - CD \cdot C'C + DE \cdot C'E - DE \cdot C'C)$$

Como deseamos que $CF \cdot CE = C'P \cdot CD$, entonces $CD \cdot C'E - CD \cdot C'C + DE \cdot C'E - DE \cdot C'C = CD \cdot C'E$

Si imponemos que $CD \cdot C'C = CE \cdot DE \rightarrow$

$$CD \cdot C'E - CD \cdot C'C + DE \cdot C'E - DE \cdot C'C = CD \cdot C'E - CE \cdot DE + DE \cdot C'E - DE \cdot C'C = CD \cdot C'E + DE \cdot (C'E - CE - C'C) = CD \cdot C'E.$$

Por tanto,

$$\frac{[\Delta CEF]}{[\Delta ABC]} = \frac{CF \cdot CE}{CB \cdot CA} = \frac{C'P \cdot CD}{CB \cdot CA} = \frac{1}{k}.$$

En definitiva, hemos de hallar los puntos auxiliares D y E para construir nuestra solución.

(1) Construcción del punto D.

$$C'P \cdot CD = \frac{1}{k} \cdot CB \cdot CA \rightarrow CD \text{ es la cuarta proporcional en } \frac{CD}{CB} = \frac{CA}{k \cdot C'P}$$

(2) Construcción del punto E.

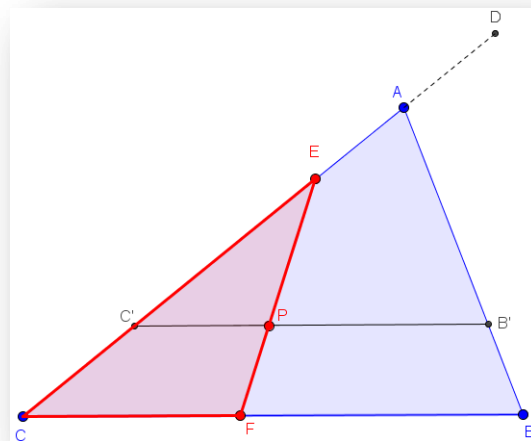
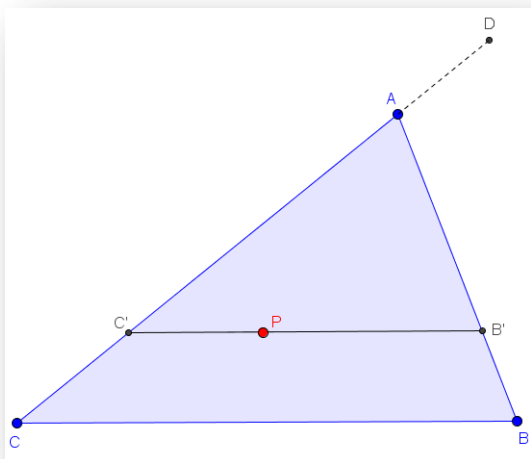
$CD \cdot C'C = CE \cdot DE \rightarrow$ Si llamamos $x = DE$, entonces:

$$CD \cdot C'C = (CD + DE) \cdot DE; CD \cdot C'C = (CD + x) \cdot x \rightarrow x^2 + CD \cdot x - CD \cdot C'C = 0$$

$$DE = x = \frac{-CD + \sqrt{CD^2 + 4 \cdot CD \cdot C'C}}{2}$$

Caso 2: P es un punto interior al triángulo ABC .

$k = 3$



Siendo P , punto interior al ΔABC , trazamos una paralela por P a uno de los lados. Sea en este caso, $B'C'$.

Determinamos sobre el lado CA el punto D de modo que se verifique $C'P \cdot CD = \frac{1}{k} \cdot CB \cdot CA$.

Sea ahora el punto E sobre el lado AC de modo que el segmento EP determine el ΔCEF de modo que $[\Delta CEF] = \frac{1}{k} \cdot [\Delta ABC]$.

Para que esto suceda debe verificarse que $\frac{[\Delta CEF]}{[\Delta ABC]} = \frac{CF \cdot CE}{CB \cdot CA} = \frac{1}{k}$

Ahora bien,

$$CF \cdot CE = \frac{C'P \cdot CE}{C'E} \cdot CE = \frac{C'P}{C'E} \cdot (CD - ED) \cdot (CC' + C'E) = \frac{C'P}{C'E} \cdot (CD \cdot CC' - ED \cdot CC' + CD \cdot C'E - ED \cdot C'E)$$

Como deseamos que $CF \cdot CE = C'P \cdot CD$, entonces $(CD \cdot CC' - ED \cdot CC' + CD \cdot C'E - ED \cdot C'E) = CD \cdot C'E$

Si imponemos que $CD \cdot C'C = CE \cdot ED \rightarrow$

$$CD \cdot CC' - ED \cdot CC' + CD \cdot C'E - ED \cdot C'E = CE \cdot ED - ED \cdot CC' + CD \cdot C'E - ED \cdot C'E = ED \cdot (CE - CC' - C'E) + CD \cdot C'E = CD \cdot C'E.$$

Por tanto,

$$\frac{[\Delta CEF]}{[\Delta ABC]} = \frac{CF \cdot CE}{CB \cdot CA} = \frac{C'P \cdot CD}{CB \cdot CA} = \frac{1}{k}.$$

En definitiva, hemos de hallar los puntos auxiliares D y E para construir nuestra solución.

(1) Construcción del punto D .

$$C'P \cdot CD = \frac{1}{k} \cdot CB \cdot CA \rightarrow CD \text{ es la cuarta proporcional en } \frac{CD}{CB} = \frac{CA}{k \cdot C'P}$$

(2) Construcción del punto E .

$CD \cdot C'C = CE \cdot ED \rightarrow$ Si llamamos $x = CE$, entonces:

$$CD \cdot C'C = CE \cdot (CD - CE); CD \cdot C'C = x \cdot (CD - x) \rightarrow x^2 - CD \cdot x + CD \cdot C'C = 0$$

$$CE = x = \frac{CD + \sqrt{CD^2 - 4 \cdot CD \cdot C'C}}{2}$$