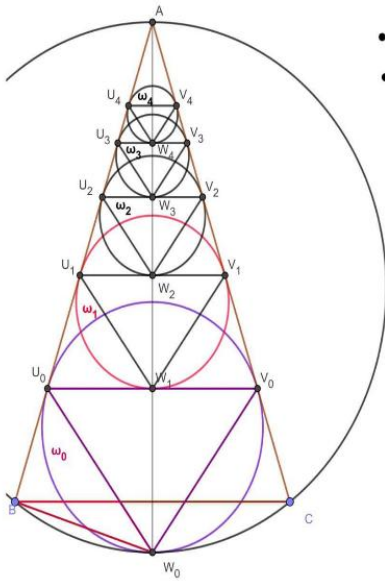


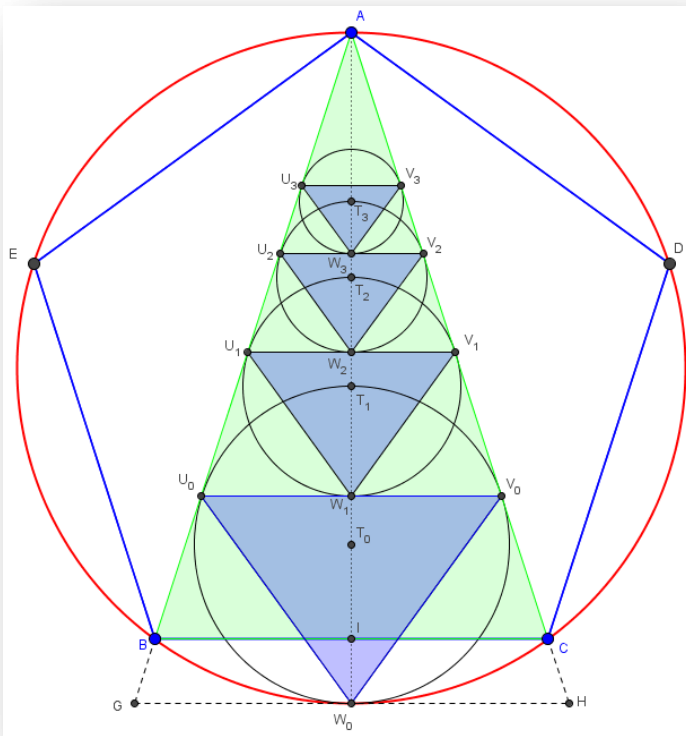
Problema 949.-



- Given golden triangle $\triangle ABC$ being $BC=1$
- Let $\omega_0 = \odot(T_0, T_0 U_0)$ be the A- mixtillinear incircle of $\triangle ABC$
- Let U_0, V_0 be touch points of ω_0 wrt the sides AB and AC
- $W_0 = \omega_0 \cap \odot(A, B, C)$
- Let $\omega_1 = \odot(T_1, T_1 U_1)$ be the incircle of $\triangle AU_0 V_0$
- Let U_1, V_1 be touch points of ω_1 wrt the sides AB and AC
- $W_1 = \omega_1 \cap U_0 V_0$
-
- Let $\omega_n = \odot(T_n, T_n U_n)$ be the incircle of $\triangle AU_{n-1} V_{n-1}$
- Let U_n, V_n be touch points of ω_n wrt the sides AB and AC
- $W_n = \omega_n \cap U_{n-1} V_{n-1}$
- Calculate $S_{\triangle U_n V_n W_n}$
- Calculate $\sum_{j=0}^{\infty} S_{\triangle U_j V_j W_j}$

Propuesto por Juan José Isach Mayo, Profesor de Matemáticas (Jubilado). Valencia (2020).

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros. Córdoba.



En el triángulo áureo $\triangle ABC$, tenemos que

$$BC = 1; AB = AC = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

El Radio R de la circunferencia circunscrita al

$$\triangle ABC, \text{ es } R = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$$

Vamos ahora a determinar el valor del radio r_0 de la circunferencia de centro T_0 inscrita en el triángulo mixtilíneo de lados AB y AC y de arco BW_0C .

$$\text{Al ser } \triangle AIB \sim \triangle AU_0 T_0 \rightarrow \frac{AB}{AT_0} = \frac{BI}{U_0 T_0}.$$

$$\text{Por tanto, } \frac{AB}{2R - r_0} = \frac{\frac{1}{2}}{r_0} \rightarrow r_0 = \frac{2R}{1+2AB}.$$

$$\text{En definitiva, } r_0 = \sqrt{10 - \frac{22}{5}\sqrt{5}}$$

Calculamos el área del $\triangle U_0 V_0 W_0$.

Para ello, observamos que $\frac{1}{2}l = U_0 W_1 = U_0 B$ y $W_1 W_0 = BW_0 = l_{10} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$.

$$\text{Así, } l = 2 \cdot l_{10} \cdot \tan 36^\circ = \sqrt{14 - 6\sqrt{5}}; \quad S[\triangle U_0 V_0 W_0] = \frac{1}{2} l \cdot l_{10} = l_{10}^2 \cdot \tan 36^\circ = \sqrt{\frac{25-11\sqrt{5}}{10}}$$

Determinaremos ahora el radio r_1 del círculo inscrito al ΔAU_0V_0 . Para ello usaremos la relación $S[\Delta AU_0V_0] = s \cdot r_1$, siendo s el semiperímetro del ΔAU_0V_0 .

$$S[\Delta AU_0V_0] = \frac{1}{2}l(2R - l_{10}) = \sqrt{\frac{40 - 16\sqrt{5}}{10}} - \sqrt{\frac{25 - 11\sqrt{5}}{10}}$$

$$r_1 = \frac{S[\Delta AU_0V_0]}{s} = \frac{2\sqrt{25 - 11\sqrt{5}} - \sqrt{65 - 29\sqrt{5}}}{\sqrt{10}}$$

Así la razón de semejanza entre las áreas de los triángulos $\Delta U_1V_1W_1$ y $\Delta U_0V_0W_0$ será k^2 , siendo $k = \frac{r_1}{r_0}$ la razón entre los respectivos radios de los círculos que los circunscriben.

$$k = \frac{r_1}{r_0} = \frac{\sqrt{30 - 10\sqrt{5}}}{4} \rightarrow k^2 = \frac{15 - 5\sqrt{5}}{8}$$

De este modo, podemos calcular el valor del área de cualquier triángulo $\Delta U_nV_nW_n$.

$$\Delta U_0V_0W_0 = \sqrt{\frac{25-11\sqrt{5}}{10}} = \Delta_0$$

$$\Delta U_1V_1W_1 = k^2\Delta_0 = \frac{15-5\sqrt{5}}{8} \sqrt{\frac{25-11\sqrt{5}}{10}}$$

$$\Delta U_2V_2W_2 = k^4\Delta_0 = \left(\frac{15-5\sqrt{5}}{8}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{25-11\sqrt{5}}{10}}$$

...

$$\Delta U_nV_nW_n = k^{2n}\Delta_0 = \left(\frac{15-5\sqrt{5}}{8}\right)^n \cdot \sqrt{\frac{25-11\sqrt{5}}{10}}$$

...

Finalmente,

$$S = \sum_{j=0}^{\infty} \Delta U_jV_jW_j = \Delta_0 + k^2\Delta_0 + k^4\Delta_0 + \dots$$

$$S = \sum_{j=0}^{\infty} \Delta U_jV_jW_j = \Delta_0 \frac{1}{1-k^2} = \sqrt{\frac{25-11\sqrt{5}}{10}} \cdot \frac{1}{1-\frac{15-5\sqrt{5}}{8}} = \frac{4}{19} \sqrt{\frac{125-41\sqrt{5}}{10}}$$

$$S = \sum_{j=0}^{\infty} \Delta U_jV_jW_j = \frac{4}{19} \sqrt{\frac{125-41\sqrt{5}}{10}} \approx 0.38429682043173874 \dots u^2$$