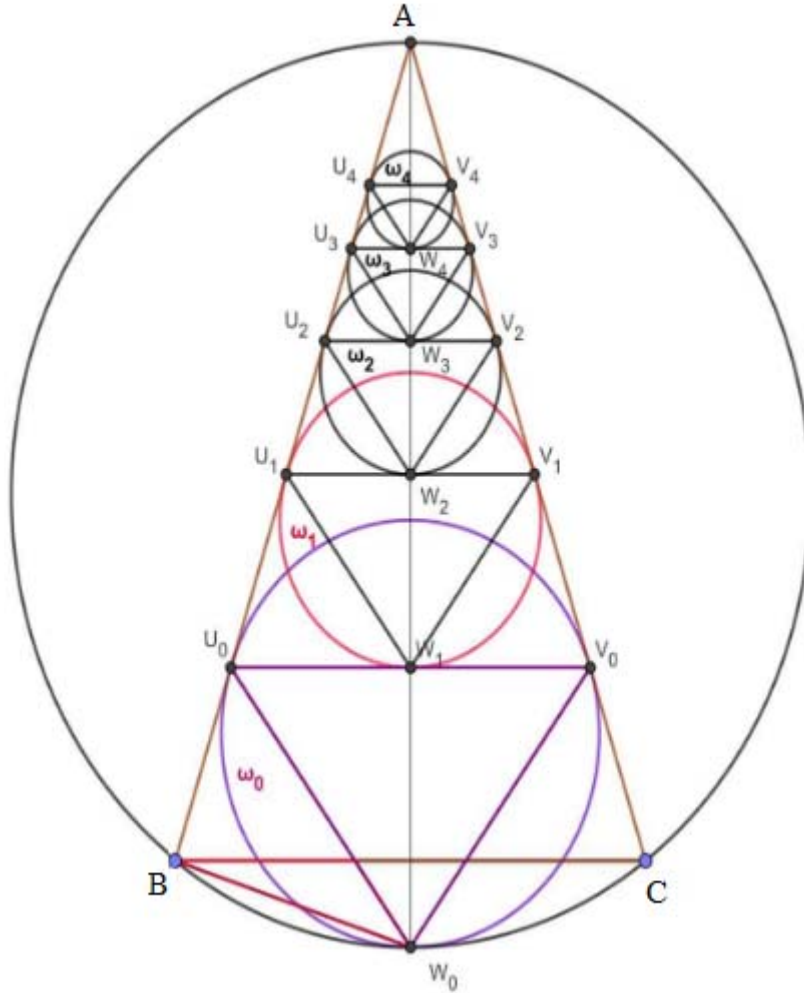


TRIÁNGULOS CABRI

Problema 949. (propuesto por Juan-José Isach Mayo) Dado un triángulo dorado ABC tal que $BC = 1$, se consideran los puntos U_0 , V_0 y W_0 de tangencia de su incírculo mixtilinear correspondiente al vértice A con las rectas AB y AC y la circunferencia circunscrita al triángulo, respectivamente. A continuación, se consideran el triángulo AU_0V_0 y los puntos U_1 , V_1 y W_1 de tangencia del incírculo de dicho triángulo con las rectas AU_0 , AV_0 y U_0V_0 , respectivamente, y se repite este proceso indefinidamente, tal como se muestra en la siguiente figura:



Calcular:

① $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : (AU_nV_n)$

② $\sum_{n=0}^{+\infty} (AU_nV_n)$

Solución:

❶ Sabemos que:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = c = \phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_A = \frac{2\phi^2 - 1}{2} \stackrel{\phi^2 = \phi + 1}{=} \frac{2\phi + 1}{2} \\ S_B = S_C = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

TRIÁNGULOS CABRI

Además, considerando coordenadas baricéntricas respecto del triángulo ABC , como, según el Lema de Verriér, la recta que pasa por el incentro del triángulo ABC y es perpendicular a la bisectriz interior (y, por tanto, paralela a la recta BC) correspondiente al vértice A :

$$2\phi x - y - z = 0$$

corta a los lados AB y AC en sus puntos de tangencia con el incírculo mixtilinear, entonces, las coordenadas de dichos puntos son:

$$\begin{cases} U_0 = (1 : 2\phi : 0) \\ V_0 = (1 : 0 : 2\phi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AU_0 = AV_0 = \frac{2\phi^2}{1+2\phi} = \sqrt{5} - 1 \\ U_0V_0 = \frac{2\phi}{1+2\phi} = 3 - \sqrt{5} \end{cases}$$

Por otro lado, como la ecuación del incírculo mixtilinear es de la forma:

$$\phi^2 xy + \phi^2 xz + yz - (px + qy + tz)(x + y + z) = 0 \quad (p, q, t \in \mathbb{R})$$

imponiendo que pase por los puntos U_0 y V_0 y sea tangente a la recta AC en el punto V_0 (o a la recta AB en el punto U_0 , da igual), obtenemos que:

$$\begin{cases} p = \frac{4\phi^4}{(1+2\phi)^2} \\ q = \frac{\phi^2}{(1+2\phi)^2} \\ t = \frac{\phi^2}{(1+2\phi)^2} \end{cases}$$

por lo que la ecuación de esta circunferencia es:

$$(1+2\phi)^2[\phi^2 xy + \phi^2 xz + yz] - [4\phi^4 x + \phi^2 y + \phi^2 z](x + y + z) = 0$$

siendo su centro (conjugado de la recta del infinito) el punto:

$$Q_0 = (4\phi^2 - 2\phi - 1 : 4\phi^3 : 4\phi^3)$$

y su radio:

$$r_0 = Q_0U_0 = \sqrt{\frac{4\phi^4}{(2\phi-1)(2\phi+1)^3}} = \frac{2\phi^2}{(2\phi+1)\sqrt{4\phi^2-1}} = \sqrt{\frac{50-22\sqrt{5}}{5}}$$

siendo:

$$(AU_0V_0) = \pi r_0^2 = \left(\frac{50-22\sqrt{5}}{5}\right)\pi$$

❷ Tomando el triángulo AU_0V_0 , resulta que:

$$\begin{cases} a_0 = U_0V_0 = 3 - \sqrt{5} \\ u_0 = v_0 = AU_0 = \sqrt{5} - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_{A_0} = \sqrt{5} - 1 \\ S_{U_0} = S_{V_0} = 7 - 3\sqrt{5} \end{cases}$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

TRIÁNGULOS CABRI

por lo que considerando coordenadas baricéntricas con respecto a dicho triángulo, se verifica que su incentro es $I_1 = (a_0 : v_0 : u_0) = (3 - \sqrt{5} : \sqrt{5} - 1 : \sqrt{5} - 1)$ y:

$$U_1 = (a_0 - v_0 + u_0 : -a_0 + v_0 + u_0 : 0) = (3 - \sqrt{5} : 3\sqrt{5} - 5 : 0)$$

luego:

$$\begin{cases} AU_1 = \frac{3\sqrt{5} - 5}{2} \\ I_1U_1 = \sqrt{\frac{65 - 29\sqrt{5}}{2}} \end{cases}$$

y, por tanto, la razón de semejanza entre el triángulo AU_1V_1 y el triángulo AU_0V_0 es:

$$k = \frac{AU_1}{AU_0} = \frac{\frac{3\sqrt{5} - 5}{2}}{\sqrt{5} - 1} = \frac{5 - \sqrt{5}}{4}$$

Además, si repetimos este proceso indefinidamente, obtenemos que:

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : k = \frac{AU_n}{AU_{n-1}}$$

manteniéndose esta misma razón para la sucesión $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de inradios de la sucesión de triángulos $(AU_nV_n)_{n \in \mathbb{N}}$, por lo que:

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : r_n = kr_{n-1} = \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{4}\right) r_{n-1} = \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{4}\right)^{n-1} r_1 = \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{4}\right)^{n-1} I_1U_1 = \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{4}\right)^{n-1} \sqrt{\frac{65 - 29\sqrt{5}}{2}}$$

y, por tanto:

$$\forall n \in \mathbb{N} : (AU_nV_n) = \pi r_n^2 = \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{4}\right)^{2(n-1)} \left(\frac{65 - 29\sqrt{5}}{2}\right) \pi$$

Una vez calculadas las áreas de todas las circunferencias, resulta que:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} (AU_nV_n) &= (AU_0V_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} (AU_nV_n) \\ &= \left(\frac{50 - 22\sqrt{5}}{5}\right) \pi + \left(\frac{65 - 29\sqrt{5}}{2}\right) \pi \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{4}\right)^{2(n-1)} \\ &= \left[\frac{50 - 22\sqrt{5}}{5} + \left(\frac{65 - 29\sqrt{5}}{2}\right) \left(\frac{14 + 10\sqrt{5}}{19}\right)\right] \pi \\ &= \left(\frac{192\sqrt{5}}{95} - \frac{80}{19}\right) \pi \end{aligned}$$