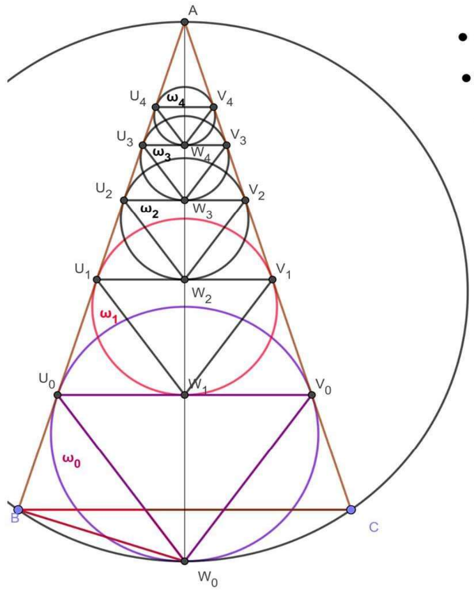
Quincena del 1 de Septiembre al 31 de Octubre de 2020.

Propuesto por Juan José Isach Mayo, Profesor de Matemáticas (Jubilado). Valencia.

Problema 949



- Given golden triangle $\triangle ABC$ being BC=1
- Let $\omega_0=\odot(T_0,T_0U_0)$ be the A- mixtillinear incircle of $\triangle ABC$
- Let U_0,V_0 be touch points of ω_0 wrt the sides AB and AC
- $W_0=\omega_0\cap\odot(A,B,C)$
- Let $\omega_1=\odot(T_1,T_1U_1)$ be the incircle of $\triangle AU_0V_0$
- Let U_1,V_1 be touch points of ω_1 wrt the sides AB and AC
- $W_1=\omega_1\cap U_0V_0$

.....

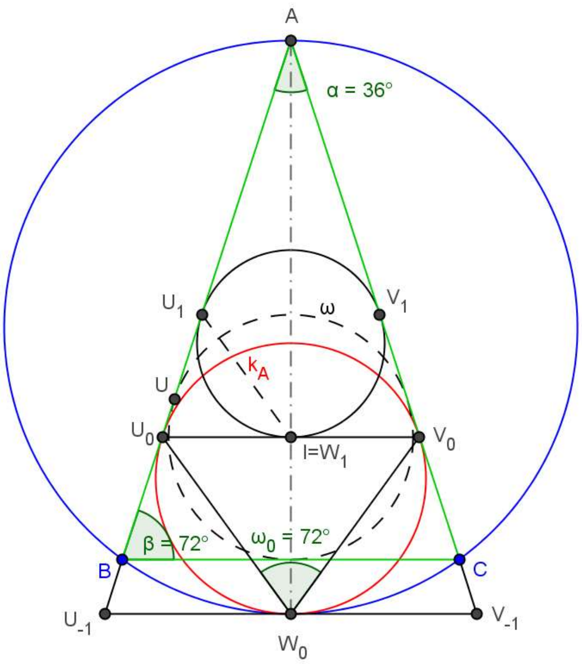
- Let $\omega_n=\odot(T_n,T_nU_n)$ be the incircle of $\triangle AU_{n-1}V_{n-1}$
- Let U_n,V_n be touch points of ω_n wrt the sides AB and AC
- $W_n=\omega_n\cap U_{n\text{-}1}V_{n.1}$
- ***Calculate*** $S_{\triangle U_nV_nW_n}$
- ***Calculate*** $\sum_{j=0}^{\infty} S_{\triangle U_jV_jW_j}$

Isach, J.J. (2020): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

El triángulo de oro es un triángulo isósceles de ángulos $36°, 72°$ y $72°$. Tomamos como base $a=1$, siendo entonces $b=c=\phi$. El triángulo de contacto interior de éste tiene como ángulos, $72°$ (el opuesto al ángulo $A=36°$), $54°$ y $54°$.

El triángulo formado por los puntos de contacto de la circunferencia mixtilínea inscrita con los lados del ángulo A y con la circunferencia circunscrita –triángulo $U_0V_0W_0$- puede considerarse como el de contacto interior del formado por los lados del ángulo A y la tangente en el punto de contacto con la circunscrita. Este triángulo es semejante al triángulo ABC.



Sabemos que, para los puntos de contacto U_0, V_0 se tiene (Problema 690) $AU_0=AV_0=\frac{bc}{s}=\frac{b^2}{s}$ y también que $\frac{AU_0}{AU_{-1}}=\frac{AU}{AB}=\frac{AU_1}{AU_0}=\frac{s-a}{b}$ y por tanto $AU_1=\frac{s-a}{b}\cdot\frac{b^2}{s}=\frac{(s-a)b}{s}=\frac{3\sqrt{5}-5}{2}$.

De lo anterior se deduce que los triángulos $\Delta U_n V_n W_n$ $n \neq 0$, de los que hay que calcular sus áreas, son semejantes entre sí.

Su razón de semejanza es $\frac{s-a}{b} = \frac{\phi-\frac{1}{2}}{\phi} = \frac{5-\sqrt{5}}{4}$.

Son los de contacto interior de los triángulos isósceles, también semejantes, $\Delta A U_{n-1} V_{n-1}$.

Para calcular el área de uno cualquiera de ellos bastará con conocer la del primero $(n = 1)$.

Para ello consideramos el triángulo AU_1W_1, de ángulos $18°, 126°$ y $36°$. Aplicando el teorema de los senos se tiene

$$U_1W_1 = \frac{\text{sen } 18}{\text{sen } 36} \cdot AU_1 = \frac{1}{2\cos 18°} \cdot AU_1 = \frac{3\sqrt{5}-5}{4 \cdot \cos 18°}$$

Y ahora calculamos

$$\boxed{[\boldsymbol{U_1V_1W_1}] = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot \left(\frac{\mathbf{3\sqrt{5}-5}}{\mathbf{4 \cdot \cos 18°}}\right)^{\mathbf{2}} \cdot \textbf{sen } \mathbf{72°} = \frac{\mathbf{(3\sqrt{5}-5)^2}}{\mathbf{32 \cdot \cos 18°}} = \frac{\mathbf{35-15\sqrt{5}}}{\mathbf{32 \cdot \cos 18°}} \approx \mathbf{0.09587891950}}$$

(Para el coseno podemos utilizar $\cos 18° = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{10+2\sqrt{5}}$)

Las áreas de los triángulos $\Delta U_n V_n W_n$ $n \neq 0$, forman una progresión geométrica ilimitada de razón $\left(\frac{s-a}{b}\right)^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{4} < 1$. (derive)

Para el término n-simo tendremos

$$\boxed{[\boldsymbol{U_nV_nW_n}] = \left(\frac{\mathbf{5-\sqrt{5}}}{\mathbf{4}}\right)^{\mathbf{2(n-1)}} \cdot [\boldsymbol{U_1V_1W_1}] = \left(\frac{\mathbf{5-\sqrt{5}}}{\mathbf{4}}\right)^{\mathbf{2(n-1)}} \cdot \frac{\mathbf{35-15\sqrt{5}}}{\mathbf{16 \cdot \cos 18°}}}$$

La suma de las áreas de todos estos es

$$[U_1V_1W_1] + [U_2V_2W_2] + \ldots + [U_nV_nW_n] + \ldots = \frac{[U_1V_1W_1]}{1-\left(\frac{s-a}{b}\right)^2} = \frac{[U_1V_1W_1]}{1-\left(\frac{5-\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{14+10\sqrt{5}}{19} \cdot [U_1V_1W_1] =$$
$$\frac{14+10\sqrt{5}}{19} \cdot \frac{35-15\sqrt{5}}{16 \cdot \cos 18°} = \frac{35\sqrt{5}-65}{76 \cdot \cos 18°} \approx 0.1834854045$$

Para $U_0V_0W_0$, según el teorema de los senos en el triángulo AU_0W_0

$$U_0W_0 = \frac{b^2}{2s \cdot \cos 18°} = \frac{\phi^2}{(2\phi+1) \cdot \cos 18°} = \frac{(\sqrt{5}-1)/2}{\cos 18°} = \frac{2\cos 72}{\cos 18°} = 2 \cdot \tan 18$$

Ahora podemos calcular su área (del triángulo $U_0V_0W_0$:)

$$[U_0V_0W_0] = \frac{1}{2} \cdot (U_0W_0)^2 \cdot \text{sen } 72° = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}{\cos 18°} = \frac{(3-\sqrt{5})/2}{2 \cdot \cos 18°}$$

La suma total es por tanto

$\sum_{i=0}^{\infty} [U_iV_iW_i] = [U_0V_0W_0] + \frac{14+10\sqrt{5}}{19} \cdot [U_1V_1W_1] = \frac{(3-\sqrt{5})/2}{2 \cdot \cos 18°} + \frac{35\sqrt{5}-65}{76 \cdot \cos 18°} = \frac{1}{2 \cdot \cos 18°} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} + \frac{35\sqrt{5}-65}{38}\right) = \frac{8\sqrt{5}-4}{38 \cdot \cos 18°}$ y si queremos podemos poner $2 \cdot \cos 18° = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10+2\sqrt{5}}$, tendremos finalmente

$$\boxed{\sum_{i=0}^{\infty} [\boldsymbol{U_iV_iW_i}] = \frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{10+2\sqrt{5}}}} \cdot \frac{\mathbf{8\sqrt{5}-4}}{\mathbf{19}} = \frac{\mathbf{2\sqrt{1250-410\sqrt{5}}}}{\mathbf{95}} \approx \mathbf{0.3842968204}} \blacksquare$$