

UNE CONJECTURE RÉSOLUE

PAR

UNE APPROCHE PASCALIENNE

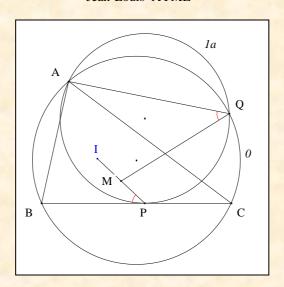
DE

L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE

Pour les Anciens, la figure est source d'inspiration, voire une icône et non un fantasme...



Jean-Louis AYME 1



Résumé.

L'auteur présente "Une conjecture" qui sera prouvée et résolue par le recours d'une hyperbole équilatère.

Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Remerciements.

Ils vont tout particulièrement au généreux et bienveillant professeur François Rideau qui, par sa grande culture Géométrique, a eu l'intuition de penser à une hyperbole équilatère et a su mener à terme sa fructueuse idée.

Abstract.

The author presents "A conjecture" that will be proven and resolved by the use of a rectangular hyperbola.

The figures are all in general position and all cited theorems can all be proved synthetically.

St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 29/08/2020 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

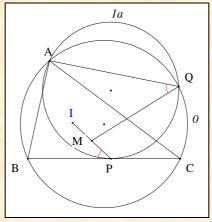
Acknowledgement.

They go in particular to the generous and caring Professor François Rideau who, through his great Geometric culture, had the intuition to think to a equilateral hyperbola and was able to bring his fruitful idea to term.

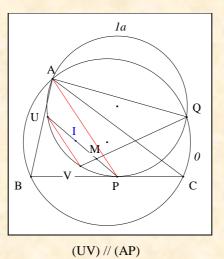
. . .

Sommaire				
A. Récapitulation	3			
B. Le problème	5			
C. Développement	8			
1. Deux parallèles				
2. Intersection sur le cercle circonscrit				
3. Intersection sur le cercle circonscrit				
D. Lexique Français-Anglais				

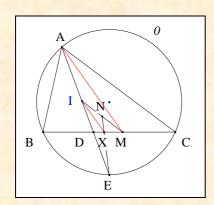
A. RÉCAPITULATION



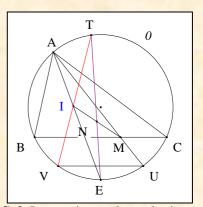
<AQM = <IPB



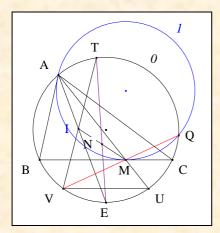
Développements



C. 1. Deux parallèles



C. 2. Intersection sur le cercle circonscrit



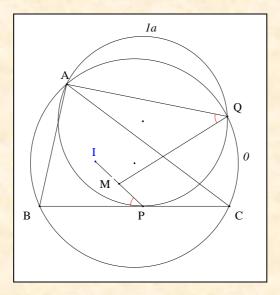
C. 3. Intersection sur le cercle circonscrit

B. LE PROBLÈME 2

Commentaire : ce problème est une généralisation des situations envisagées dans "Du milieu de [ID] aux milieux de [IM] et [IP] " ³.

VISION

Figure:



Traits: ABC un triangle,

I le centre de ABC, P un point de [BC], M le milieu de [IP],

0 le cercle circonscrit à ABC,

le cercle passant par A, tangent à (BC) en Ple second point d'intersection de la avec 0.

Donné: $\langle IPB = \langle AQM \rangle$.

et

VISUALISATION

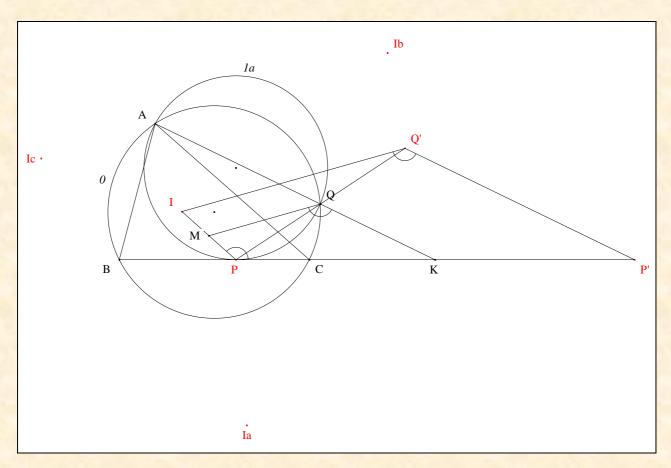
Geometry, AoPS du 26/07/2020; https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h2207766_geometry
Deux angles égaux, *Les-Mathematiques.net*; http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,2061190
Geometry, AoPS du 26/07/2020; https://artofproblemsolving.com/community/q1h2207766p16724895 *Romantics of Geometry*, Problem **5827**;

 $[\]label{lem:https://fr-fr.facebook.com/photo.php?fbid=1648892295292116\&set=gm.3197170330396651\&type=3\&theater\&ifg=1~Peru~Geometrico~;$

 $[\]label{lem:https://fr-fr.facebook.com/photo.php?fbid=10220210536846691\&set=gm.3043511699095036\&type=3\&theater\&ifg=1\ \textit{Diophante},\ D\textbf{1889}\ ;$

http://www.diophante.fr/problemes-par-themes/geometrie/d1-geometrie-plane-triangles-et-cercles/4813-d1889-deux-angles-egaux *Triangulosabri*; Problem **950**; https://personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/

Ayme J.-L., Du milieu de [ID] aux milieux..., G.G.G. vol. 44; https://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



Notons

 IaIbIc
 le triangle excentral de ABC
 H*p
 l'hyperbole équilatère passant par A, B, C, I, P
 le point d'intersection de (AQ) et (BC),
 le symétrique de P par rapport à K
 et
 Q'
 le symétrique de P par rapport à Q.

• D'après "Approche pascalienne de l'hyperbole" 4,

(1) Q est le centre de H^*p (Cf. **A. IV. 2.** p. 19)

(2) P' et Q' sont sur H^*p (Cf. A. IV. 2. p. 19-20)

(3) $\langle P'PI = \langle IQ'P' \rangle$ (Cf. A. III. 3. p. 16).

• D'après Thalès de Milet "La droite des milieux" appliqué

(1) au triangle PQ'P', (QK) // (Q'P')

(2) au triangle PQ'I, (QM) // (Q'I).

• Une chasse angulaire:

* par "Angles à côtés parallèles", <IQ'P' = <MQK

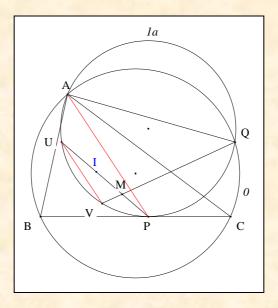
* par transitivité de =, $\langle P'PI = \langle MQK \rangle$.

• Conclusion : par supplémentarité, <IPB = <AQM.

⁴ Ayme J.-L., Approche pascalienne de l'hyperbole, G.G.G. vol. -4; https://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

Terminologie: H^*p est l'hyperbole de Ludwig Stammer ⁵.

Scolie: deux parallèles 6



- **Traits :** aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons U, V les seconds points d'intersection de *1a* resp. avec (QM), (PI).
- Une chasse angulaire:

nous avons : <IPB = <AQM par une autre écriture, <UPB = <AQV

* par décomposition, $\langle \text{UPV} + \langle \text{VPB} = \langle \text{AQV} \rangle$

* par "es théorèmes de l'angle inscrit et de la tangente", < VQV + < VQP = < AQV

* par addition, <UQP = <AQV

- * la quadrilatère convexe et cyclique AUVP ayant ses diagonales égales est un trapèze.
- Conclusion: (UV) est parallèle à (AP).

Stammer L., enseignant-chercheur à l'université Martin Luther de Halle (Würtemberg, Allemagne)

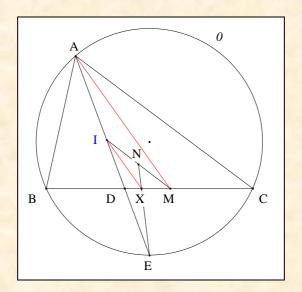
Ayme J.-L., Two hard parallels, AoPS du 29/07/2020;

C. DÉVELOPPEMENTS

1. Deux parallèles 7

VISION

Figure:



Traits: ABC un triangle,

0 le cercle circonscrit à ABC,

I le centre de ABC,

D le point d'intersection de (AI) et (BC), E le second point d'intersection de (AI) avec 0,

M un point de [BC], N le milieu de [IM]

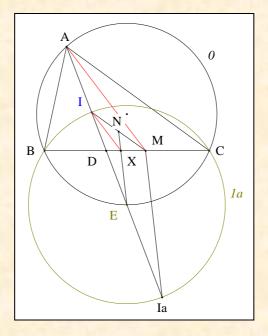
et X le point d'intersection de (EN) et (BC).

Donné : (IX) est parallèle à (AM).

VISUALISATION

-

Parallel lines in triangle, AoPS du 20/08/2013; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=550083



• Notons Ia le A-excentre de ABC

et 1a le A-cercle de Mention de ABC.

• Scolie: E est le milieu de [IIa].

 D'après Thalès de Milet "La droite des milieux" appliqué au triangle IMIa,

(EXN) // (IaM).

• D'après Thalès de Milet "Rapports",

DM/DX = DIa/DE.

• Scolie : D est sur l'axe radical de 0 et 1a.

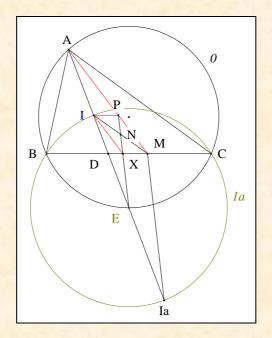
• D'après Jakob Steiner "Puissance d'un point par rapport à un cercle" appliqué à D relativement à 0 et 1a, DIa.DI = DA.DE ou encore par transitivité de la relation =, DM/DX = DA/DI.

• Conclusion: d'après Thalès de Milet "Rapports", (IX) // (AM).

Scolie: une parallèle à (BC) 8

0

Nice parallel to BC through I (easy problem), AoPS du 21/07/2010; https://artofproblemsolving.com/community/c6h358063



- Notons P le point d'intersection de (EN) et (AM).
- D'après l'axiome de passage **IIIb**, N étant sur l'axe médian de la bande de frontières (IX), (AM), N est le milieu de [XP]; en conséquence, le quadrilatère XMPI est un parallélogramme.
- **Conclusion :** (IP) // (BC).

2. Intersection sur le cercle circonscrit 9

IMO 2010, Problem 2

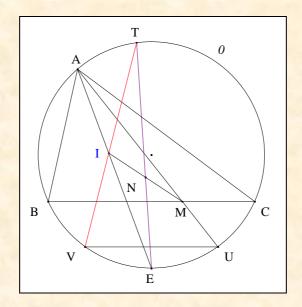
Proposed

by

Tai Wai Ming and Wang Chongli (Hong Kong)

VISION

Figure:



Traits: ABC un triangle,

0 le cercle circonscrit à ABC,

I le centre de ABC,

E le second point d'intersection de (AI) avec θ ,

M un point de [BC], N le milieu de [IM],

U le second point d'intersection de (AM) et 0,

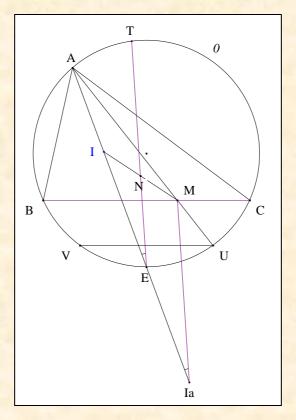
V le second point d'intersection de la parallèle à (BC) issue de U avec 0

et T le point d'intersection de (EN) avec 0.

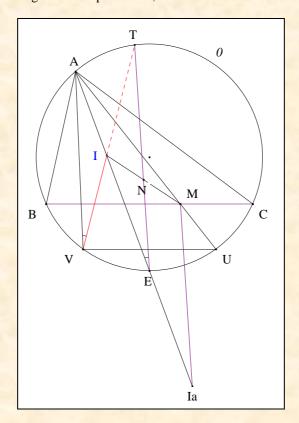
Donné : V, I et T sont alignés.

VISUALISATION

Problem 2 in IMO 2010, AoPS du 07/07/2010; https://artofproblemsolving.com/community/c6h356083p1935927



- Notons Ia le A-excentre de ABC.
- D'après Problème 1, (IaM) // (ENT).
- Conclusion partielle : par "Angles à côtés parallèles", <TEA = <MIaA.



- (AV) et (AU) étant deux A-isogonale de ABC,
- <VAI = <IaAU

• Une chasse segmentaire:

* d'après "Le produit AB.AC", Problème 2 ¹⁰, AV.AM = AB.AC

Problème 5, AB.AC = AI.AIa

* par transitivité de =, AV.AM = AI.AIa

* par une autre écriture, AV/AIa = AI/AM.

• Les triangles AMIa et AIV étant semblables, <MIaA = <IVA;

par transitivité de =, <TEA = <IVA.

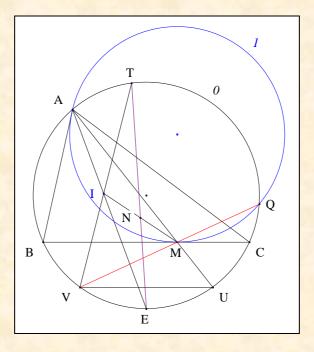
• Conclusion : V, I et T sont alignés.

Ayme J.-L., Le produit AB.AC, G.G.G. vol. 17, p. 9; https://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

3. Intersection sur le cercle circonscrit

VISION

Figure:



Traits: aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons

1 le cercle passant par A, tangent à (BC) en M

et Q le second point d'intersection de 1 avec 0.

Donné : M, Q et V sont alignés.

VISUALISATION

• Conclusion: les cercles 1 et 0, les points de base A et Q, la monienne (MAU), les parallèles ((BC) et (UV), conduisent au théorème 1' de Reim; en conséquence, M, Q et V sont alignés.

D. LEXIQUE

FRANÇAIS - ANGLAIS

A aligné collinear annexe anne				
aligné annexe annex annexe annexe annexe annexe axiom axiome axiome appendice alpendix adjoint associate acutungle acutungle acutungle axiome aroutungle axiome axiom	A		N	
annexe axiom appendixe appendixe appendixe appendixe appendixe appendixe appendixe appendixe appendixe appos acutangle acute angle on the intorique in intorique appendixe appos acutangle acute angle on the corre orthocenter on the corre acutangle acute angle on the corre orthocenter on the corre acutangle acute angle or acute angle acute		collinger		nama
axiome appendice appendix adjoint associate adjoint associate acutungle acutungle acutungle acuto angle axiome ariome acutungle acuto angle axiome ariome acutungle acutomage ac				
appendice adjoint associate or orthocentre orthocentre acutangle a				•
adjoint associate approps by the way btw acutangle acute angle axiom B			note instorique	mstoric note
apropos acutangle acutangle acutangle acutangle acutangle axiome B				
acutangle axiome axiome parallel axiome parallel axiome parallel p				4
axiome axiome bisector bisector bisectrice bisectrice bisectrice bisectrice bisectror parallèle entre elles parallèle parallèle parallèles entre elles parallèle entre elles parallèles entre elles pout elle entre elles pout elle entre elles parallèles entre elles parallèles entre elles pout elle entre elles parallèles entre elles e				
B bissectrice bissectrice bande strip centre centre centre cute du cercle circonscrit cercle circonscrit concourance conicide confondu c			ou encore	otherwise
B bissectrice bissector parallèle pa	axiome	axiom		
bissectrice bande strip bande strip bande strip centre centre cincenter centre centre centre centre centre centre centre centre cincenter cerle circonscrit circumcenter colinicar concourance concourance concide confondu coincide coff side parallelos entre elles perpendiculaire poetdal poetdal pedal pedal pedal pedal pedal pedal potdo foot pout de vue point de vue pour de vieure d				
bande strip perallelogramme pédal pedal pédal pedal pédal pedal pe				
C centre incenter centre du cercle circonscrit circumcenter du cercle circonscrit circumcenter ceviente du cercle circonscrit circumcircle point de vue point of view postulat postulate cevienne cevian point de vue postulate postulat postulate cevienne cevian point point point cevienne colineare colineare coincide coincide confondu coincident coff side par conséquence consequently commentaire commentaire comment recommentaire comment recommentaire comment respectively respectively adaptise dance different from semble similar conforde different from semble similar sens clockwise in this sens clockwise in this sens conforder symmetric symmet				
Centre incenter incenter centre du cercle circonscrit circumcenter cercle circonscrit circumcenter cercle circonscrit circumcenter colindarie postulat postulate postulate concourance coincide confondu coincident coffé side par conséquence comentaire comment respectivement commentaire commentaire comment coincide d'après according to donc distinct de différent from semblable sens clockwise in this sens clockwis	bande	strip		
centre centre du cercle circonscrit circumcenter cercle circonscrit circumcenter point de vue point de vue postulate cercle circonscrit circumcircle cévienne cevian point point point collinear collinear collinear pour tout point point collinear concourance coincide conicide coniciden confondu coincident commentaire commentaire comment respectivement respectivement respectivement respectively respectivement in the properties of the propertie				
centre du cercle circonscrit circumcircle cercle circonscrit circumcircle cercle circonscrit circumcircle cevian colinéaire colinéaire colinéaire colinéaire coincide confondu coincident coincide confondu conceurence coincide consequence comentaire commentaire commentaire comment respectivement respectivem	C			
cercle circonscrit cévienne cevian point point point cévienne cevian point point point point collinear concourance concurrence coincide coincide coincide coincide coincide coincide consequently comentaire comentaire coment respectively respectivement respectively ratio distinct de different from semblable similar sufficient interieur internal triangle decontact triangle triangle incidence incidenc	centre	incenter	pied	foot
cévienne cevian point point colinéaire collinear collinear collinear concourance concurrence coincide confondu coincéde side par conséquence comentaire commentaire comment recommentaire comment respectivement respect		circumcenter	point de vue	
cévienne cevian point point colinéaire collinear pour tout for any concourance coincide Q confondu coincide Q confondu coincide Quadrilatère quadrilateral côté side Image: conséquence of days et al. R Image: conséquence of days et al. Image: conséquence of days et al. Image: consequently et al. R Image: consequently et al. R Image: consequently et al. Image: consequently et al. R Image: consequently et al. Image: consequently et al. R Image: consequently equadrilatère quadrilatère reconnaissance respectively raspectively raspectively raspectively	cercle circonscrit	circumcircle	postulat	postulate
colinéaire collinear concurrence concurrence coincide coincide coincide coincide confondu coincide confondu coincide confondu coincident côté side gar conséquence comentaire comment reconnaissance acknowledgement respectivement respectively rapport ratio donc therefore répertoirer to index d'où hence d'où hence d'iterate d'i	cévienne	cevian	point	
concourance coincide comment R R commentis reconnaissance reconaissance respectivement respectively rapport ratio conc donc cherefore repertorier repertorie	colinéaire	collinear	•	
coincide confondu coincident cofté Quadrilatère quadrilatère côté side par conséquence consequently R thanks par conséquence comment remerciements thanks reconnaissance acknowledgement respectivement respectively d'après according to rapport ratio donc therefore répertorier to index d'oû hence S d'oû hence S d'oû hence S E semblable similar extérieur external segment segment Sommaire summary symmedian figure suffisante sufficient sommet (s) vertex (vertice) H rapèze trapèze huteur altitude T hypothèse hypothèsis trapèze trapèze tel que such as théorème theorem triangle de contact	concourance	concurrence		
confondu coincient side côté side par conséquence commentaire D commentaire D commentaire D commentaire D comment respectivement respectively res	coincide		0	
côté side par conséquence consequently comment irrepresents comment respectively respectivement respectively respectivement respectively ratio donc de line droite line droite distinct de de line extérieur external segment sement respectively ratio donc de line droite distinct de de line droite distinct de de line external segment summary symédiane sufficient sommet (s) vertex (vertice) exterieur altitude phypothèse hypothèsis taleque identical triangle de contact triangle triangle incidence incidence de lemma lisibilité legibility M mediane médiantice perpendicular bissector proposed a consequently respectivement respectivement respectivement respectively respectivement respectively respectivement respectively respectivement respectively respectivement respectively respectivement respectivement respectively respectivement respectively respectivement respectivement respectively respectivement r				quadrilateral
par conséquence comment commen	côté	side	1	1
commentaire comment remerciements thanks acknowledgement reconnaissance respectively respectivement respectively ratio donc displayed acknowledgement respectivement respectively rapport ratio donc displayed acknowledgement respectively respectively rapport ratio donc displayed acknowledgement respectively ratio donc donc displayed acknowledgement respectively ratio donc donc displayed acknowledgement respectively ratio donc displayed acknowledgement respectively ratio donc displayed acknowledgement respectively rapport ratio donc displayed acknowledgement respectively respectively ratio donc displayed acknowledgement respectively respectively ratio donc displayed acknowledgement respectively respectively respectively respectively respectively donc donc displayed acknowledgement respectively respectively.			R	
D creconnaissance respectivement respectively d'après according to therefore therefore line d'où therefore line d'où hence S semblable similar sens clockwise in this order extérieur extérieur estérieur estérieur summary symédiane summary symédiane sufficient sommet (s) vertex (vertice) H hauteur altitude hypothèse hypothèse hypothèse hypothèse hypothèse intérieur interinal triangle triangle de contact triangle triangle incidence incidence incidence inediane médiatrice perpendicular bissector interior respectivement respectivement respectively rapport to index decining to			==	thanks
D respectivement respectively d'après according to rapport ratio donc therefore répetroirer to index d'où hence S distinct de different from semblable similar clockwise in this sens clockwise in this E order extérieur external segment segment sommaire summary symédiane symmedian figure suffisante sufficient sommet (s) vertex (vertice) H T hauteur altitude T hypothèse hypothesis trapèze trapezium tel que such as I théorème theorem intérieur internal triangle triangle identique identical triangle triangle incidence incidence triangle rectangle right-angle triangle L lemme legibility M mediane mediane mediane mediane mediatrice perpendicular bissector	Commentance	comment		
d'après according to therefore therefore tine d'où therefore line d'où hence S distinct de different from semblable similar sens clockwise in this order segment segment summary symédiane sufficient sommet (s) vertex (vertice) H	n			
donc droite line lemme lemme lemme lemme mediane m		according to		
droite d'où hence bence different from semblable similar sens clockwise in this order segment segment summary segment symédiane sommet (s) vertex (vertice) H hauteur altitude hypothèse hypothèse hypothèse hypothèse intérieur intérieur intérieur intérieur incidence lemme lemme lisibilité legibility L lemme lemme lisibilité legibility M mediane médiante mediane m				
d'où hence S distinct de different from semblable similar E order extérieur external segment segment F symédiane symmedian figure suffisante sufficient sommet (s) vertex (vertice) H rapèze trapèze hypothèse to pyothèsis tel que such as I trapèze trapèze trapezium tel que such as théorème theorem intérieur internal triangle triangle identique identical triangle de contact contact triangle i.e. namely triangle rectangle right-angle triangle incidence incidence right-angle triangle L lemme legibility M legibility legibility			repertorier	to maex
distinct de different from semblable sens clockwise in this E extérieur external segment segment summary F symédiane sufficante sommet (s) vertex (vertice) H segment summary F symédiane sufficante sufficient sommet (s) vertex (vertice) H hauteur altitude T surapèze trapezium such as théorème theorem intérieur internal triangle triangle identique identical incidence incidence L lemme lemma lisibilité legibility M mediane mediane mediane mediane mediantice incidence mediantice incidence mediantice incidence mediane mediane mediane mediantice incidence segment sems clockwise in this ordere clockwise in this ordere sems segment sems clockwise in this ordere sems sems segment segme			C	
sens clockwise in this order segment segment segment summary symédiane sufficient sommet (s) vertex (vertice) H hauteur Altitude T T such as théorème theorem intérieur internal identique identique incidence incidence L lemme lemma lisibilité legibility M mediane medi				
E extérieur external external segment segment summary F	distinct de	different from		
extérieur external segment segment summary symédiane symédiane sufficient sommet (s) vertex (vertice) H	-			clockwise in this
Figure figure symédiane symmedian sufficient sommet (s) vertex (vertice) H				
F figure figure suffisante sufficient sommet (s) vertex (vertice) H hauteur altitude hypothèse hypothesis tel que tel que triangle triangle identique identique identical incidence incidence L lemme lemma lisibilité legibility M mediane mediant mediant mediant mediant mediante me	extérieur	external		
figure figure suffisante sufficient vertex (vertice) H hauteur altitude T hypothèse hypothesis tel que tel que such as I trapèze trapezium tel que such as I triangle triangle triangle triangle identique identical triangle triangle triangle incidence incidence L lemme lemma lisibilité legibility M mediane mediante perpendicular bissector				
H hauteur hypothèse hypothèsis literieur intérieur intérieur intérieur incidence lemme lisibilité legibility sommet (s) vertex (vertice) T trapèze trapèze trapèze trapèze trapèze trapèze trapezium ttel que such as tthéorème ttheorem triangle triangle triangle triangle de contact triangle triangle rectangle right-angle triangle incidence M mediane median mediane mediane mediarice mediarice mediarice sommet (s) Vertex (vertice) T trapèze trape trape trape trape trape trape trape trape trangle trangle trangle trangle trangle trangle			•	•
H hauteur hypothèse hypothesis I trapèze tel que such as théorème théorème triangle triangle triangle triangle triangle triangle triangle rectangle triangle triangle triangle triangle triangle rectangle L lemme lemma lisibilité legibility M mediane médiatrice médiatrice T trapèze trapezium theorem theorem triangle triangle triangle triangle e contact triangle rectangle right-angle triangle H mediane mediane mediane mediane mediane mediarice	figure	figure	suffisante	
hauteur altitude hypothèse hypothèsis trapèze trapezium such as I trapèze trapezium such as I trapèze trapezium such as théorème theorem triangle triangle triangle de contact contact triangle triangle rectangle right-angle triangle triangle rectangle L lemme lemma legibility M mediane médiatrice median perpendicular bissector			sommet (s)	vertex (vertice)
hypothèse hypothesis trapèze trapezium I tel que such as théorème theorem intérieur internal triangle triangle identique identical triangle de contact triangle i.e. namely triangle rectangle right-angle triangle incidence L lemme lemma lisibilité legibility M mediane médiatrice perpendicular bissector	H			
tel que such as I théorème theorem intérieur intérieur identique identical triangle triangle de contact triangle i.e. namely incidence L lemme lemma legibility M mediane mediane médiatrice perpendicular bissector				
I théorème theorem triangle rectangle triangle rectangle L lemme lemma legibility M mediane median median perpendicular bissector	hypothèse	hypothesis		trapezium
I théorème theorem triangle rectangle triangle rectangle L lemme lemma legibility M mediane median median perpendicular bissector			tel que	such as
identique i.e. namely triangle de contact triangle incidence incidence L lemme lemma lisibilité legibility M mediane médiatrice perpendicular bissector	I			theorem
identique i.e. namely triangle de contact triangle incidence incidence L lemme lemma lisibilité legibility M mediane médiatrice perpendicular bissector	intérieur	internal	triangle	triangle
i.e. namely triangle rectangle right-angle triangle incidence L lemme lemma legibility M mediane mediane median perpendicular bissector	identique	identical		
incidence incidence L lemme lemma lisibilité legibility M mediane median médiatrice perpendicular bissector				
L lemme lemma lisibilité legibility M mediane median médiatrice perpendicular bissector				
lemme lemma lisibilité legibility M mediane median médiatrice perpendicular bissector				
lemme lemma lisibilité legibility M mediane median médiatrice perpendicular bissector	L			
lisibilité legibility M mediane median médiatrice perpendicular bissector		lemma		
M mediane median médiatrice perpendicular bissector				
mediane median médiatrice perpendicular bissector	Islanic	icgionity		
mediane median médiatrice perpendicular bissector	M			
médiatrice perpendicular bissector		modian		
midpoint midpoint				
	mineu	miapoint		