



UNE CONJECTURE RÉSOLUE

PAR

UNE APPROCHE PASCALIENNE

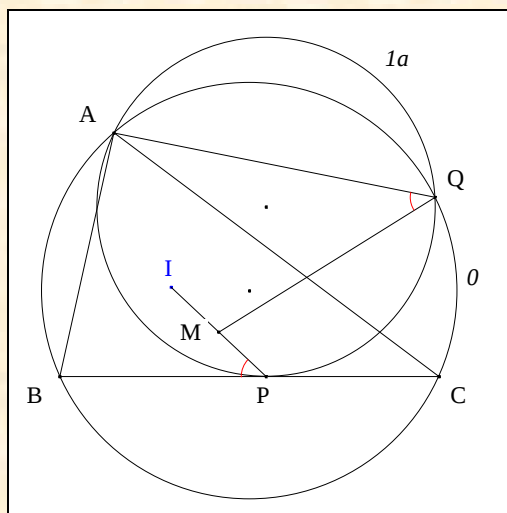
DE

L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE

*Pour les Anciens,
la figure est source d'inspiration,
voire une icône et non un fantôme...*



Jean-Louis AYME ¹



Résumé.

L'auteur présente "Une conjecture" qui sera prouvée et résolue par le recours d'une hyperbole équilatère.

Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Remerciements.

Ils vont tout particulièrement au généreux et bienveillant professeur François Rideau qui, par sa grande culture Géométrique, a eu l'intuition de penser à une hyperbole équilatère et a su mener à terme sa fructueuse idée.

Abstract.

The author presents "A conjecture" that will be proven and resolved by the use of a rectangular hyperbola.

The figures are all in general position and all cited theorems can all be proved synthetically.

Acknowledgement. They go in particular to the generous and caring Professor François Rideau who, through his great Geometric culture, had the intuition to think to a equilateral hyperbola and was able to bring his fruitful idea to term.

...

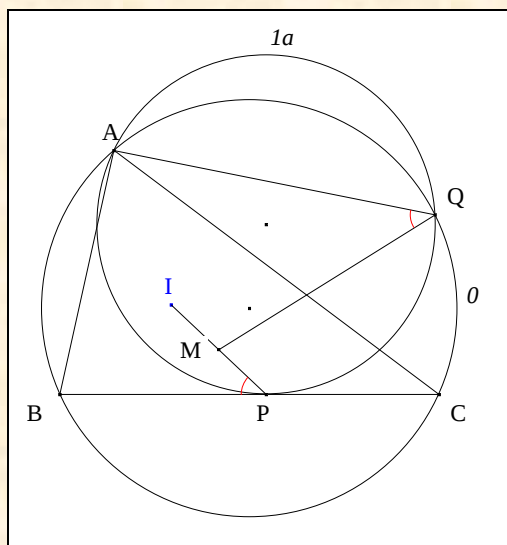
Sommaire	
A. Récapitulation	3
B. Le problème	5
C. Développement	8
1. Deux parallèles	8
2. Intersection sur le cercle circonscrit	11
3. Intersection sur le cercle circonscrit	14
D. Lexique Français-Anglais	15

B. LE PROBLÈME ²

Commentaire : ce problème est une généralisation des situations envisagées dans "Du milieu de [ID] aux milieux de [IM] et [IP] " ³.

VISION

Figure :



Traits :

ABC	un triangle,
I	le centre de ABC,
P	un point de [BC],
M	le milieu de [IP],
O	le cercle circonscrit à ABC,
1a	le cercle passant par A, tangent à (BC) en P
et Q	le second point d'intersection de 1a avec O.

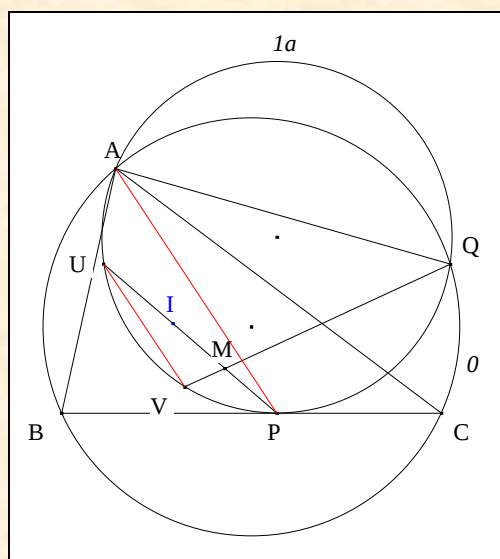
Donné : $\angle IPB = \angle AQM$.

VISUALISATION

² Geometry, AoPS du 26/07/2020 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h2207766_geometry
 Deux angles égaux, *Les-Mathematiques.net* ; <http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,2061190>
 Geometry, AoPS du 26/07/2020 ; <https://artofproblemsolving.com/community/q1h2207766p16724895>
Romantics of Geometry, Problem **5827** ;
<https://fr-fr.facebook.com/photo.php?fbid=1648892295292116&set=gm.3197170330396651&type=3&theater&ifg=1>
Peru Geometrico ;
<https://fr-fr.facebook.com/photo.php?fbid=10220210536846691&set=gm.3043511699095036&type=3&theater&ifg=1>
Diophante, **D1889** ;
<http://www.diophante.fr/problemes-par-themes/geometrie/d1-geometrie-plane-triangles-et-cercles/4813-d1889-deux-angles-egaux>
Triangulosabri ; Problem **950** ; <https://personal.us.es/rbarroso/triangulosabri/>
³ Ayme J.-L., Du milieu de [ID] aux milieux...., G.G.G. vol. **44** ; <https://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

Terminologie : H^*p est l'hyperbole de Ludwig Stammer ⁵.

Scolie : deux parallèles ⁶



- **Traits :** aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
 U, V les seconds points d'intersection de $1a$ resp. avec (QM) , (PI) .
- Une chasse angulaire :

*	nous avons :	$\angle IPB = \angle AQM$
*	par une autre écriture,	$\angle UPB = \angle AQV$
*	par décomposition,	$\angle UPV + \angle VPB = \angle AQV$
*	par "es théorèmes de l'angle inscrit et de la tangente",	$\angle UQV + \angle VQP = \angle AQV$
*	par addition,	$\angle UQP = \angle AQV$
*	la quadrilatère convexe et cyclique $AUVP$ ayant ses diagonales égales est un trapèze.	
- **Conclusion :** (UV) est parallèle à (AP) .

⁵ Stammer L., enseignant-chercheur à l'université Martin Luther de Halle (Würtemberg, Allemagne)

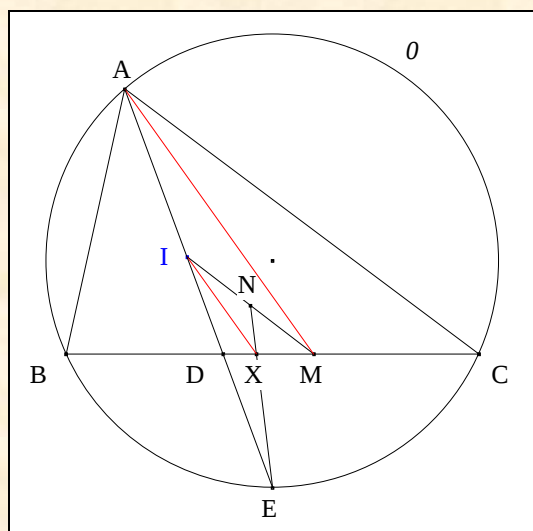
⁶ Ayme J.-L., Two hard parallels, AoPS du 29/07/2020 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6h2211977_two_hard_parallel

C. DÉVELOPPEMENTS

1. Deux parallèles ⁷

VISION

Figure :



Traits :

ABC	un triangle,
O	le cercle circonscrit à ABC,
I	le centre de ABC,
D	le point d'intersection de (AI) et (BC),
E	le second point d'intersection de (AI) avec O ,
M	un point de [BC],
N	le milieu de [IM]

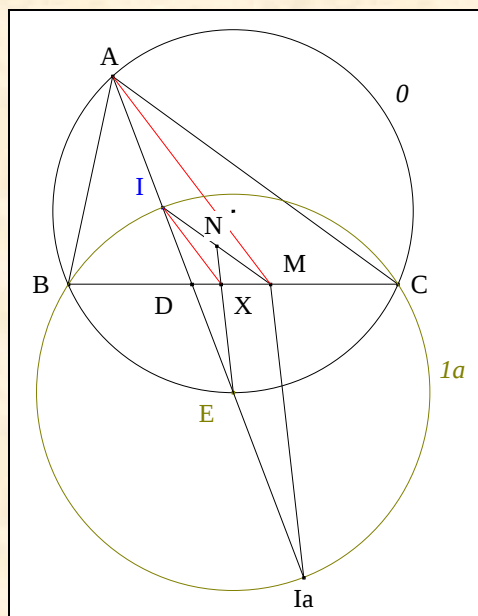
et

X	le point d'intersection de (EN) et (BC).
---	--

Donné : (IX) est parallèle à (AM).

VISUALISATION

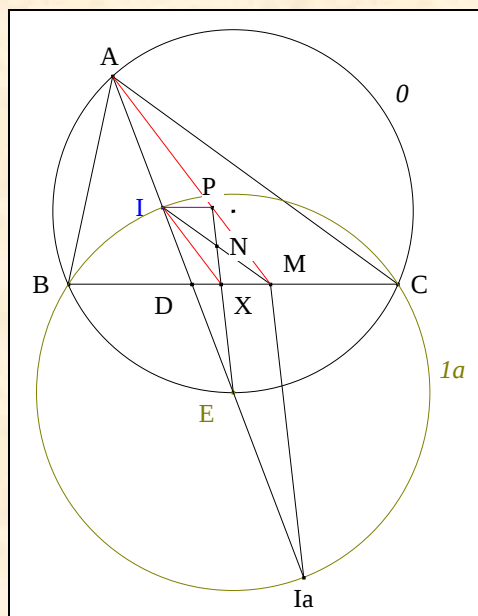
⁷Parallel lines in triangle, AoPS du 20/08/2013 ; <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=550083>



- Notons Ia le A-excentre de ABC
et Ia le A-cercle de Mention de ABC.
- **Scolie :** E est le milieu de $[IIa]$.
- D'après Thalès de Milet "La droite des milieux"
appliqué au triangle $IMIa$, $(EXN) \parallel (IaM)$.
- D'après Thalès de Milet "Rapports", $DM/DX = DIa/DE$.
- **Scolie :** D est sur l'axe radical de O et Ia .
- D'après Jakob Steiner "Puissance d'un point par rapport à un cercle"
appliqué à D relativement à O et Ia , $DIa \cdot DI = DA \cdot DE$ ou encore $DIa/DE = DA/DI$;
par transitivité de la relation $=$, $DM/DX = DA/DI$.
- **Conclusion :** d'après Thalès de Milet "Rapports", $(IX) \parallel (AM)$.

Scolie : une parallèle à (BC) ⁸

⁸ Nice parallel to BC through I (easy problem), AoPS du 21/07/2010 ;
<https://artofproblemsolving.com/community/c6h358063>



- Notons P le point d'intersection de (EN) et (AM) .
- D'après l'axiome de passage **IIIb**, N étant sur l'axe médian de la bande de frontières (IX) , (AM) , N est le milieu de $[XP]$;
en conséquence, le quadrilatère $XMPI$ est un parallélogramme.
- **Conclusion :** $(IP) \parallel (BC)$.

2. Intersection sur le cercle circonscrit⁹

IMO 2010, Problem 2

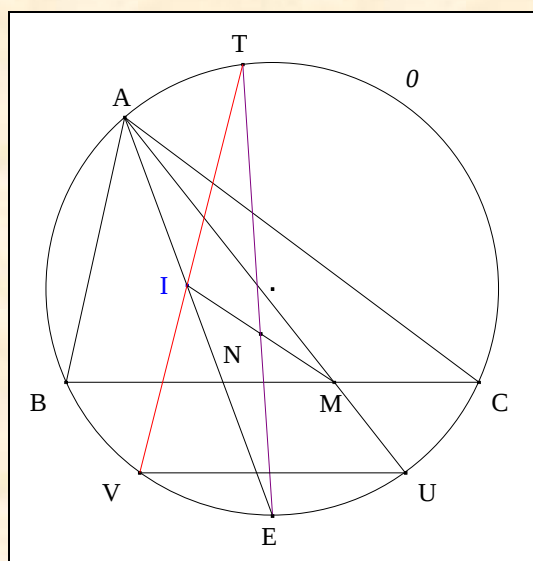
Proposed

by

Tai Wai Ming and Wang Chongli (Hong Kong)

VISION

Figure :



Traits :

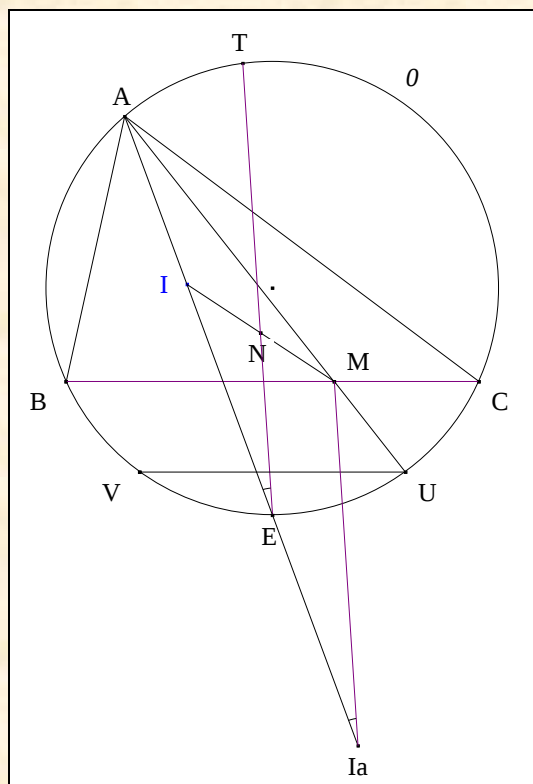
ABC	un triangle,
O	le cercle circonscrit à ABC,
I	le centre de ABC,
E	le second point d'intersection de (AI) avec O ,
M	un point de [BC],
N	le milieu de [IM],
U	le second point d'intersection de (AM) et O ,
V	le second point d'intersection de la parallèle à (BC) issue de U avec O
et T	le point d'intersection de (EN) avec O .

Donné : V, I et T sont alignés.

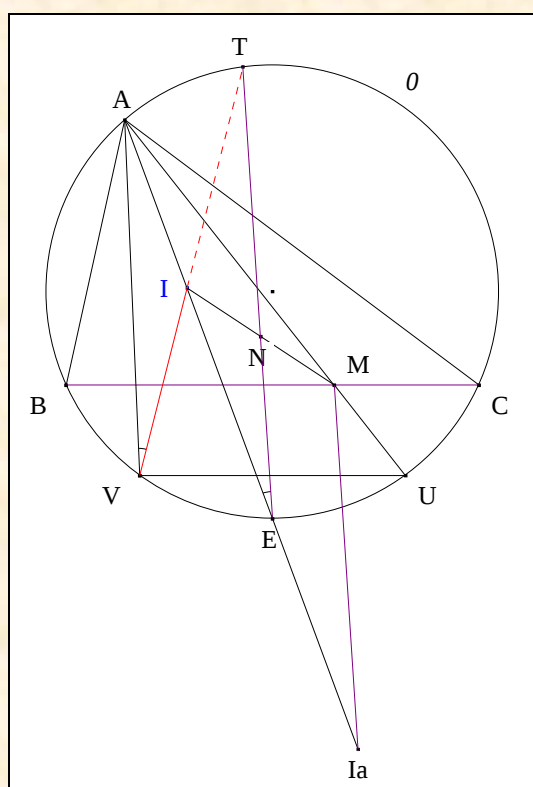
VISUALISATION

⁹

Problem 2 in IMO 2010, AoPS du 07/07/2010 ; <https://artofproblemsolving.com/community/c6h356083p1935927>



- Notons I_A le A-excentre de ABC.
- D'après Problème 1, $\angle I_A M A = \angle I_A M B$ (IaM) // (ENT).
- **Conclusion partielle :** par "Angles à côtés parallèles", $\angle I_A M A = \angle M I_A A$ <TEA = <MIaA.



- (AV) et (AU) étant deux A-isogonale de ABC, $\angle VAI = \angle I_aAU$

- Une chasse segmentaire :

* d'après "Le produit AB.AC", Problème 2 ¹⁰, $AV.AM = AB.AC$

Problème 5, $AB.AC = AI.AI_a$

* par transitivité de =, $AV.AM = AI.AI_a$

* par une autre écriture, $AV/AI_a = AI/AM$.

- Les triangles AMI_a et AIV étant semblables, $\angle M I_a A = \angle I V A$;
par transitivité de =, $\angle T E A = \angle I V A$.

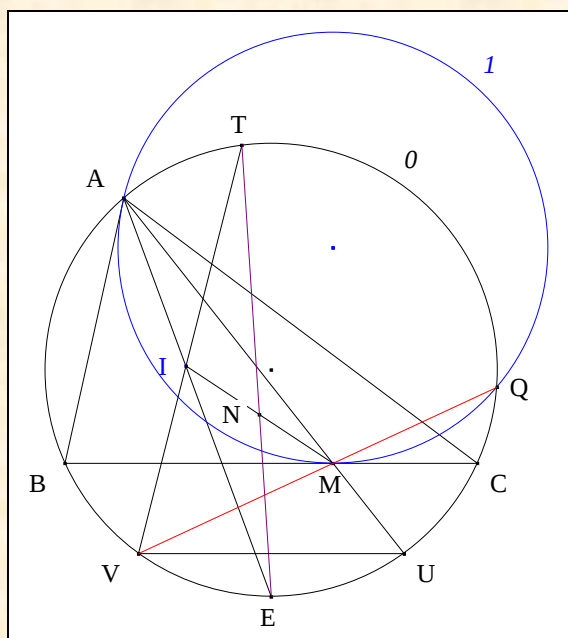
- **Conclusion :** V, I et T sont alignés.

¹⁰ Ayme J.-L., Le produit AB.AC, G.G.G. vol. 17, p. 9 ; <https://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

3. Intersection sur le cercle circonscrit

VISION

Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
et 1 le cercle passant par A, tangent à (BC) en M
 Q le second point d'intersection de 1 avec 0 .

Donné : M, Q et V sont alignés.

VISUALISATION

- **Conclusion :** les cercles 1 et 0 , les points de base A et Q, la monienne (MAU), les parallèles ((BC) et (UV), conduisent au théorème 1' de Reim ; en conséquence, M, Q et V sont alignés.

D. LEXIQUE

FRANÇAIS - ANGLAIS

A		N	
aligné	collinear	Notons	name
annexe	annex	nécessaire	necessary
axiome	axiom	note historique	historic note
appendice	appendix	O	orthocentre ou encore
adjoint	associate		
a propos	by the way btw	P	orthocenter otherwise
acutangle	acute angle		
axiome	axiom	parallèle	parallel
B	bisectrice	parallèles entre elles	parallel to each other
		parallélogramme	parallelogram
bande	strip	pédal	pedal
C	incenter	perpendiculaire	perpendicular
		pied	foot
centre	circumcenter	point de vue	point of view
centre du cercle circonscrit	circumcircle	postulat	postulate
cercle circonscrit	cevian	point	point
cévienne	collinear	pour tout	for any
colinéaire	concurrence	Q	quadrilatère
concourance	coincide		
coincide	coincide	R	quadrilateral
confondu	coincident		
côté	side	remerciements	thanks
par conséquence	consequently	reconnaissance	acknowledgement
commentaire	comment	respectivement	respectively
D	according to	rapport	ratio
		répertorié	to index
d'après	therefore	S	similar
donc	line		
droite	hence	semblable	clockwise in this
d'où	different from	sens	
distinct de		order	
E	external	segment	segment
		Sommaire	summary
extérieur		symédiane	symmedian
F	figure	suffisante	sufficient
		sommet (s)	vertex (vertice)
H	altitude	T	trapezium
hauteur	hypothesis	trapèze	such as
hypothèse		tel que	theorem
I	internal	théorème	triangle
		triangle	contact triangle
intérieur	identical	triangle de contact	right-angle triangle
identique	namely	triangle rectangle	
i.e.	incidence		
incidence			
L	lemma		
lemme	legibility		
lisibilité			
M	median		
mediane	perpendicular bisector		
médiatrice	midpoint		
milieu			