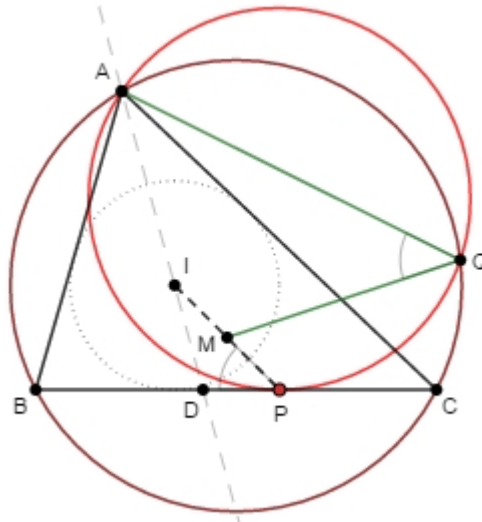


TRIÁNGULOS CABRI

Problema 950. (propuesto por Jean-Louis Aymé) Dado un triángulo ABC con incentro I , se consideran un punto P situado sobre la recta BC pero no situado sobre la bisectriz interior correspondiente al vértice A , el punto medio M del segmento IP y la circunferencia que pasa por el punto A y es tangente a la recta BC en el punto P . A continuación, se considera el segundo punto de corte Q entre dicha circunferencia y la circunferencia circunscrita al triángulo ABC . Probar que:

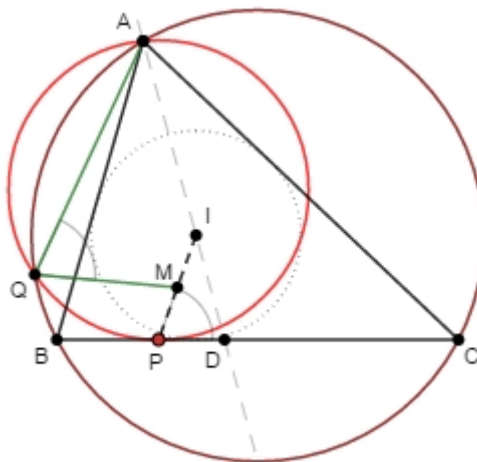
- ① Si el punto P está situado a la derecha del punto D de intersección entre la recta BC y la bisectriz interior correspondiente al vértice A , entonces:

$$\triangle AQM = \triangle IPB$$



- ② Si el punto P está situado a la izquierda del punto D de intersección entre la recta BC y la bisectriz interior correspondiente al vértice A , entonces:

$$\triangle MQA = \triangle CPI$$



TRIÁNGULOS CABRI

Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC , si $P = (0 : p : 1 - p)$ ($p \neq \frac{b}{b+c}$), como $I = (a : b : c)$, resulta que $M = (a : b + p(a + b + c) : c + (1 - p)(a + b + c))$. Además, como la ecuación de una circunferencia general que pasa por el punto A es de la forma

$$a^2yz + b^2xz + c^2xy - (vy + wz)(x + y + z) = 0 \quad (v, w \in \mathbb{R})$$

imponiendo que sea tangente a la recta BC en el punto P , obtenemos que:

$$\begin{cases} v = a^2p^2 \\ w = a^2(1 - p)^2 \end{cases}$$

por lo que la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto A y es tangente a la recta BC en el punto P es:

$$a^2yz + b^2xz + c^2xy - a^2[p^2y + (1 - p)^2z](x + y + z) = 0$$

estando sus puntos de corte con la circunferencia circunscrita al triángulo ABC determinados por las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = a^2yz + b^2xz + c^2xy - a^2[p^2y + (1 - p)^2z](x + y + z) \\ 0 = a^2yz + b^2xz + c^2xy \end{cases}$$

o, equivalentemente (ya que los puntos de intersección entre ambas circunferencias no están situados sobre la recta del infinito), por el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = p^2y + (1 - p)^2z \\ 0 = a^2yz + b^2xz + c^2xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = (1 : 0 : 0) \\ Q = (a^2(1 - p)^2p^2 : -p^2(b^2(1 - p)^2 - c^2p^2) : (1 - p)^2(b^2(1 - p)^2 - c^2p^2)) \end{cases}$$

y, por tanto:

$$\begin{cases} AQ \equiv 0 = (1 - p)^2y + p^2z \\ MQ \equiv 0 = (-b + bp - cp)(bp + cp - b)x + a(1 - p)^2(ap + bp + cp - b)y + ap^2(ap + bp + cp - a - b)z \\ IP \equiv 0 = (b - bp - cp)x + a(1 - p)y + apz \\ BP \equiv 0 = x \end{cases}$$

Finalmente:

- ① Si el punto P está situado a la derecha del punto D de intersección entre la recta BC y la bisectriz interior correspondiente al vértice A , entonces:

$$S \cot(\angle AQM) = S \cot[\angle (AQ, MQ)] = -\frac{(a + b + c)[a(2p - 1) - b + c]}{2} = S \cot[\angle (IP, BP)] = S \cot(\angle IPB)$$

por lo que:

$$\cot(\angle AQM) = \cot(\angle IPB)$$

y, por tanto, $\angle AQM = \angle IPB$.

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

TRIÁNGULOS CABRI

- ② Si el punto P está situado a la izquierda del punto D de intersección entre la recta BC y la bisectriz interior correspondiente al vértice A , entonces:

$$S \cot(\angle MQA) = S \cot[\angle (MQ, AQ)] = \frac{(a+b+c)[a(2p-1)-b+c]}{2} = S \cot[\angle (CP, IP)] = S \cot(\angle CPI)$$

por lo que:

$$\cot(\angle MQA) = \cot(\angle IPB)$$

y, por tanto, $\angle MQA = \angle CPI$.