Problema 951.-
Dado un triángulo ABC, demuestra la siguiente igualdad:

$$\sum_{Cíclico} \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{a\left(1+\sin\frac{\beta}{2}\right)\left(1+\sin\frac{\gamma}{2}\right)}=\frac{1}{s}$$

Propuesto por Juan José Isach Mayo, Profesor de Matemáticas (Jubilado). Valencia, (2020).

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros. Córdoba.

Son de sobra conocidas las expresiones de:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}};\qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

Llamamos K a la expresión que conforma el primer miembro de la igualdad a probar.

$$K=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{a\left(1+\sin\frac{\beta}{2}\right)\left(1+\sin\frac{\gamma}{2}\right)}+\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{b\left(1+\sin\frac{\gamma}{2}\right)\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}+\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{c\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\sin\frac{\beta}{2}\right)}=K_1+K_2+K_3$$

Transformamos cada uno de los sumandos de K del modo

$$K_1=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{a\left(1+\sin\frac{\beta}{2}\right)\left(1+\sin\frac{\gamma}{2}\right)}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\,(1-\sin\frac{\beta}{2})\,(1-\sin\frac{\gamma}{2})}{a\,\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\,(1-\sin\frac{\beta}{2})\,(1-\sin\frac{\gamma}{2})}{a\,\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}}$$

$$K_1=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}(1-\sin\frac{\beta}{2})\,(1-\sin\frac{\gamma}{2})}{a\,\frac{s(s-a)}{bc}\frac{s(s-b)}{ca}\frac{s(s-c)}{ab}}=(abc)^2\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}(1-\sin\frac{\beta}{2})\,(1-\sin\frac{\gamma}{2})}{a\,s^3(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$K_1=(abc)\frac{[ABC]\cos\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin\frac{\beta}{2}\right)\left(1-\sin\frac{\gamma}{2}\right)}{s^2\,s(s-a)(s-b)(s-c)}=(abc)\frac{[ABC]\cos\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin\frac{\beta}{2}\right)\left(1-\sin\frac{\gamma}{2}\right)}{s^2\,[ABC]^2}$$

$$K_1=\frac{abc}{s^2\,[ABC]}\cos\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin\frac{\beta}{2}\right)\left(1-\sin\frac{\gamma}{2}\right)$$

De igual modo, obtendríamos

$$K_2=\frac{abc}{s^2\,[ABC]}\cos\frac{\beta}{2}\left(1-\sin\frac{\gamma}{2}\right)\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right);\quad K_3=\frac{abc}{s^2\,[ABC]}\cos\frac{\gamma}{2}\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-\sin\frac{\beta}{2}\right)$$

En definitiva,

$$K=\frac{abc}{s^2\,[ABC]}\Bigg(\cos\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin\frac{\beta}{2}\right)\left(1-\sin\frac{\gamma}{2}\right)+\cos\frac{\beta}{2}\left(1-\sin\frac{\gamma}{2}\right)\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)+\cos\frac{\gamma}{2}\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-\sin\frac{\beta}{2}\right)\Bigg)$$

Desarrollamos el paréntesis T y obtenemos:

$$T=\cos\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin\frac{\beta}{2}\right)\left(1-\sin\frac{\gamma}{2}\right)+\cos\frac{\beta}{2}\left(1-\sin\frac{\gamma}{2}\right)\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)+\cos\frac{\gamma}{2}\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-\sin\frac{\beta}{2}\right)=$$

$=\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}-(\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2})-(\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2})-(\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+$
$\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta}{2})\ +\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$

Ahora bien,

$\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}=\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}=\sin\frac{\pi-\beta}{2}=\cos\frac{\beta}{2}$

$\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}=\cos\frac{\gamma}{2}$

$\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}$

Por tanto,

$$T=\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$$

Ahora bien,

$$\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}=\sin\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}\sin\gamma$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=\sin\frac{\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}=\frac{1}{2}\sin\beta$$

$$\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)=\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\sin\alpha$$

Por tanto,

$$T=\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=\frac{1}{4}(\sin\gamma+\sin\beta+\sin\alpha)$$

$$K=\frac{abc}{s^2\,[ABC]}\cdot T=\frac{abc}{s^2\,[ABC]}\frac{1}{4}(\sin\gamma+\sin\beta+\sin\alpha);$$

$$K=\frac{1}{2s^2\,[ABC]}\left(\frac{1}{2}abc\sin\gamma+\frac{1}{2}abc\sin\beta+\frac{1}{2}abc\sin\alpha\right);$$

$$K=\frac{1}{2s^2\,[ABC]}(c\cdot[ABC]+b\cdot[ABC]+a\cdot[ABC])=\frac{a+b+c}{2s^2}=\frac{2s}{2s^2}=\frac{1}{s},\quad cqd \qquad \blacksquare$$