

TRIÁNGULOS CABRI

Problema 953. (propuesto por Antonio-Roberto Martínez Fernández y Miguel-Ángel Pérez García-Ortega)
 Dado un triángulo ABC , se considera un cuarto punto D que no está situado sobre ninguna de las tres rectas que contienen a dicho triángulo, de forma que los cuatro puntos determinan un cuadrilátero. Determinar el número de parábolas que circunscriben a dicho cuadrilátero en los siguientes casos:

- ① Es un cuadrilátero cóncavo.
- ② Es un cuadrilátero convexo que no es un trapecio ni un paralelogramo.
- ③ Es un trapecio.
- ④ Es un paralelogramo.

Solución:

- ① Si un cuadrilátero es cóncavo, entonces, uno de sus vértices está contenido en el interior del triángulo determinado por los otros tres, por lo que podemos suponer que el vértice D es interior al triángulo ABC , en cuyo caso, considerando la referencia afín $\{B; \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\}$, al ser:

$$\begin{cases} A = (0, 1) \\ B = (0, 0) \\ C = (1, 0) \end{cases} \Rightarrow AB \equiv x + y - 1 = 0$$

si $D = (p, q)$ ($p > 0, q > 0, p + q - 1 < 0$), como la ecuación de una cónica general es:

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = 0$$

imponiendo que circunscriba al cuadrilátero $ABCD$, obtenemos que:

$$\begin{cases} a = -2d \\ b = -2e \\ c = \frac{dp(p-1) + eq(q-1)}{pq} \\ f = 0 \end{cases}$$

por lo que la ecuación de una cónica general (no degenerada) que circunscriba al cuadrilátero $ABCD$ es:

$$dpqx^2 + epqy^2 - [dp(p-1) + eq(q-1)]xy - dpqx - epqy = 0 \quad (d \neq 0 \neq e)$$

o también:

$$\theta pqx^2 + pqy^2 - [\theta p(p-1) + q(q-1)]xy - \theta pqx - pqy = 0 \quad (\theta \neq 0)$$

Además, como:

$$\begin{vmatrix} 2\theta pq & \theta p(p-1) + q(q-1) \\ \theta p(p-1) + q(q-1) & 2pq \end{vmatrix} = -[\theta^2 p^2 (p-1)^2 - 2\theta pq(pq + p + q - 1) + q^2 (q-1)^2]$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

TRIÁNGULOS CABRI

entonces, esta cónica será una parábola cuando:

$$\theta = \frac{q \left[pq + p + q - 1 \pm 2 \sqrt{\underset{<0}{pq(p+q-1)}} \right]}{p(p-1)^2} \notin \mathbb{R}$$

y, por tanto, podemos concluir que, si el cuadrilátero $ABCD$ es cóncavo, no existe ninguna parábola que lo circunscriba.

- ② Si $ABCD$ es un cuadrilátero convexo que no es un trapecio ni un paralelogramo, considerando la referencia afín $\{B; \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\}$, al ser:

$$\begin{cases} A = (0, 1) \\ B = (0, 0) \\ C = (1, 0) \end{cases} \Rightarrow AB \equiv x + y - 1 = 0$$

si $D = (p, q)$ ($p \neq 0, q \neq 0, p + q - 1 \neq 0$), como la ecuación de una cónica general es:

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = 0$$

imponiendo que circunscriba al cuadrilátero $ABCD$, obtenemos que:

$$\begin{cases} a = -2d \\ b = -2e \\ c = \frac{dp(p-1) + eq(q-1)}{pq} \\ f = 0 \end{cases}$$

por lo que la ecuación de una cónica general (no degenerada) que circunscriba al cuadrilátero $ABCD$ es:

$$dpqx^2 + epqy^2 - [dp(p-1) + eq(q-1)]xy - dpqx - epqy = 0 \quad (d \neq 0 \neq e)$$

o también:

$$\theta pqx^2 + pqy^2 - [\theta p(p-1) + q(q-1)]xy - \theta pqx - pqy = 0 \quad (\theta \neq 0)$$

Además, como:

$$\begin{vmatrix} 2\theta pq & \theta p(p-1) + q(q-1) \\ \theta p(p-1) + q(q-1) & 2pq \end{vmatrix} = -[\theta^2 p^2 (p-1)^2 - 2\theta pq(pq + p + q - 1) + q^2 (q-1)^2]$$

entonces, esta cónica será una parábola cuando:

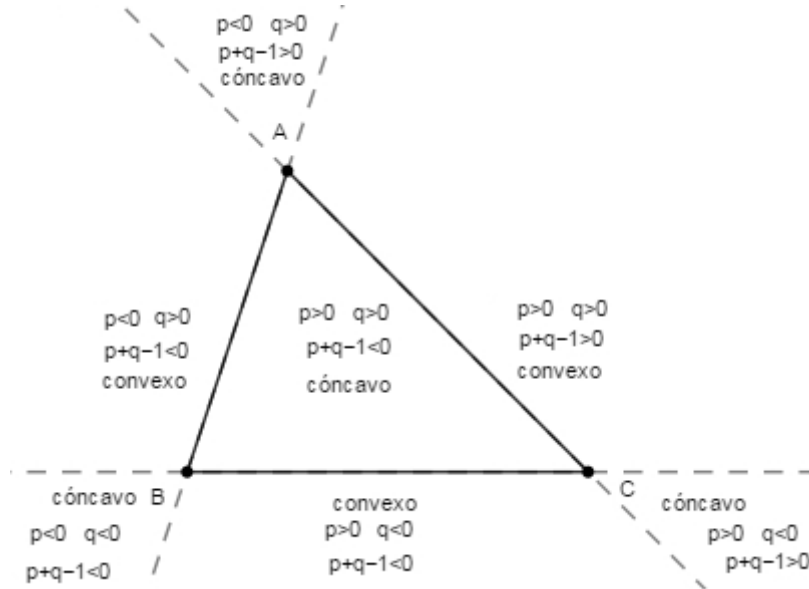
$$\theta = \frac{q \left[pq + p + q - 1 \pm 2 \sqrt{\underset{>0}{pq(p+q-1)}} \right]}{p(p-1)^2} \in \mathbb{R}$$

TRIÁNGULOS CABRI

y, por tanto, existen exactamente dos parábolas que circunscriben al cuadrilátero $ABCD$, cuyas ecuaciones son:

$$\frac{q^2[pq+p+q-1 \pm 2\sqrt{pq(p+q-1)}]}{(p-1)^2}x^2 + pqy^2 - [\theta p(p-1) + q(q-1)]xy - \frac{q^2[pq+p+q-1 \pm 2\sqrt{pq(p+q-1)}]}{(p-1)^2}x - pqy = 0$$

(estas dos parábolas son distintas porque $pq(p+q-1) \neq 0$)



- ③ Si $ABCD$ es un trapecio con lados paralelos AD y BC , considerando la referencia afín $\{B; \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\}$, al ser:

$$\begin{cases} A = (0, 1) \\ B = (0, 0) \\ C = (1, 0) \end{cases}$$

si $D = (p, 1)$ ($0 \neq p \neq 1$), como la ecuación de una cónica general es:

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = 0$$

imponiendo que circunscriba al cuadrilátero $ABCD$, obtenemos que:

$$\begin{cases} a = -2d \\ b = -2e \\ c = \frac{dp(p-1)}{p} \\ f = 0 \end{cases}$$

por lo que la ecuación de una cónica general (no degenerada) que circunscriba al cuadrilátero $ABCD$ es:

$$dpx^2 + epy^2 - dp(p-1)xy - dp x - ep y = 0 \quad (d \neq 0 \neq e)$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

TRIÁNGULOS CABRI

o también:

$$\theta px^2 + py^2 - \theta p(p-1)xy - \theta px - py = 0 \quad (\theta \neq 0)$$

Además, como:

$$\begin{vmatrix} 2\theta p & \theta p(p-1) \\ \theta p(p-1) & 2p \end{vmatrix} = \theta p^2 [4 - \theta(p-1)^2]$$

entonces, esta cónica será una parábola cuando:

$$\theta = \frac{4}{(p-1)^2}$$

y, por tanto, existe una única parábola que circunscribe al trapecio $ABCD$, cuya ecuación es:

$$4px^2 + p(p-1)^2y^2 - 4p(p-1)xy - 4px - p(p-1)^2y = 0 \quad (0 \neq p \neq 1)$$

④ Si $ABCD$ es un paralelogramo, considerando la referencia afín $\{B; \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\}$, al ser:

$$\begin{cases} A = (0, 1) \\ B = (0, 0) \\ C = (1, 0) \\ D = (1, 1) \end{cases}$$

como la ecuación de una cónica general es:

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = 0$$

imponiendo que circunscribe al cuadrilátero $ABCD$, obtenemos que:

$$\begin{cases} a = -2d \\ b = -2e \\ c = 0 \\ f = 0 \end{cases}$$

por lo que la ecuación de una cónica general (no degenerada) que circunscribe al cuadrilátero $ABCD$ es:

$$dx^2 + ey^2 - dx - ey = 0 \quad (d \neq 0 \neq e)$$

o también:

$$\theta x^2 + y^2 - \theta x - y = 0 \quad (\theta \neq 0)$$

Además, como:

$$\begin{vmatrix} \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \theta \neq 0$$

entonces, no existe ninguna parábola que circunscribe al paralelogramo $ABCD$.

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

TRIÁNGULOS CABRI

Problema 953. (propuesto por Antonio-Roberto Martínez Fernández y Miguel-Ángel Pérez García-Ortega)
 Dado un triángulo ABC , se considera un cuarto punto D que no está situado sobre ninguna de las tres rectas que contienen a dicho triángulo, de forma que los cuatro puntos determinan un cuadrilátero. Determinar el número de parábolas que circunscriben a dicho cuadrilátero en los siguientes casos:

- ① Es un cuadrilátero cóncavo.
- ② Es un cuadrilátero convexo que no es un trapecio ni un paralelogramo.
- ③ Es un trapecio.
- ④ Es un paralelogramo.

Solución:

- ① Si un cuadrilátero es cóncavo, entonces, uno de sus vértices está contenido en el interior del triángulo determinado por los otros tres, por lo que podemos suponer que el vértice D es interior al triángulo ABC , en cuyo caso, considerando coordenadas baricéntricas con respecto a dicho triángulo, existen $p, q > 0$ tales que $D = (1 : p : q)$. Además, como la ecuación de una cónica general (no degenerada) circunscrita a dicho triángulo es:

$$xy + vxz + wyz = 0 \quad (v \neq 0 \neq w)$$

y sus puntos del infinito vienen dados por las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = xy + vxz + wyz \\ 0 = x + y + z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = (-1 + v - w - \sqrt{(v-w)^2 - 2(v+w) + 1} : -1 - v + w + \sqrt{(v-w)^2 - 2(v+w) + 1} : 2) \\ I_2 = (-1 + v - w + \sqrt{(v-w)^2 - 2(v+w) + 1} : -1 - v + w - \sqrt{(v-w)^2 - 2(v+w) + 1} : 2) \end{cases}$$

imponiendo que esta cónica sea una parábola, resulta que:

$$I_1 = I_2 \Rightarrow \sqrt{(v-w)^2 - 2(v+w) + 1} = 0 \Rightarrow (v-w)^2 - 2(v+w) + 1 = 0 \Rightarrow 0 \neq w = 1 \pm 2\sqrt{v} + v$$

por lo que vamos a distinguir dos casos:

- ❶ Si $w = 1 - 2\sqrt{v} + v$ ($v \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$), entonces, la ecuación de una parábola general circunscrita al triángulo ABC es:

$$xy + vxz + (1 - 2\sqrt{v} + v)yz = 0$$

por lo que, imponiendo que pase por el punto D , obtenemos que:

$$p(1+q) - 2pq\sqrt{v} + q(1+p)v = 0 \Rightarrow \sqrt{v} = \frac{pq \pm \sqrt{\frac{-pq(1+p+q)}{<0}}}{(1+p)q} \notin \mathbb{R}$$

y, por tanto, no existe ninguna parábola de este tipo circunscrita al trapecio $ABCD$.

- ❷ Si $w = 1 + 2\sqrt{v} + v$ ($v > 0$), entonces, la ecuación de una parábola general circunscrita al triángulo ABC es:

$$xy + vxz + (1 + 2\sqrt{v} + v)yz = 0$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

TRIÁNGULOS CABRI

por lo que, imponiendo que pase por el punto D , obtenemos que:

$$p(1+q) + 2pq\sqrt{v} + q(1+p)v = 0 \Rightarrow \sqrt{v} = \frac{-pq \pm \sqrt{\underset{<0}{-pq(1+p+q)}}}{(1+p)q} \notin \mathbb{R}$$

y, por tanto, no existe ninguna parábola de este tipo circunscrita al trapecio $ABCD$.

Podemos, pues, concluir que, si el cuadrilátero $ABCD$ es cóncavo, no existe ninguna parábola que lo circunscriba.

- ② Si $ABCD$ es un cuadrilátero convexo que no es un trapecio ni un paralelogramo, considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC , existen $p \neq 0 \neq q$ tales que $D = (1 : p : q)$ ($p+q \neq 0$, $p+1 \neq 0$, $q+1 \neq 0$, $p+q+1 > 0$, porque el cuadrilátero $ABCD$ no es un paralelogramo y el punto D no está situado sobre la recta del infinito). Además, como la ecuación de una cónica general (no degenerada) circunscrita a dicho triángulo es:

$$xy + vxz + wyz = 0 \quad (v \neq 0 \neq w)$$

y sus puntos del infinito vienen dados por las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = xy + vxz + wyz \\ 0 = x + y + z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = (-1 + v - w - \sqrt{(v-w)^2 - 2(v+w) + 1} : -1 - v + w + \sqrt{(v-w)^2 - 2(v+w) + 1} : 2) \\ I_2 = (-1 + v - w + \sqrt{(v-w)^2 - 2(v+w) + 1} : -1 - v + w - \sqrt{(v-w)^2 - 2(v+w) + 1} : 2) \end{cases}$$

imponiendo que esta cónica sea una parábola, resulta que:

$$I_1 = I_2 \Rightarrow \sqrt{(v-w)^2 - 2(v+w) + 1} = 0 \Rightarrow (v-w)^2 - 2(v+w) + 1 = 0 \Rightarrow 0 \neq w = 1 \pm 2\sqrt{v} + v$$

por lo que vamos a distinguir dos casos, obteniéndose en ambos las dos mismas parábolas (distintas entre sí, ya que $\sqrt{-pq(1+p+q)} \neq 0$) y, por tanto, éstas son las dos únicas parábolas que circunscriben al cuadrilátero $ABCD$:

- ❶ Si $w = 1 - 2\sqrt{v} + v$ ($v \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$), entonces, la ecuación de una parábola general circunscrita al triángulo ABC es:

$$xy + vxz + (1 - 2\sqrt{v} + v)yz = 0$$

por lo que, imponiendo que pase por el punto D , obtenemos que:

$$p(1+q) - 2pq\sqrt{v} + q(1+p)v = 0 \Rightarrow \sqrt{v} = \frac{pq \pm \sqrt{\underset{>0}{-pq(1+p+q)}}}{(1+p)q}$$

y vamos a distinguir, a su vez, otros dos casos:

- ☺ Si $\sqrt{v} = \frac{pq + \sqrt{-pq(1+p+q)}}{(1+p)q}$, entonces, la ecuación de la parábola circunscrita al trapecio $ABCD$ es:

$$q(p+1)^2 xy - p(p+q+1 - pq + 2\sqrt{-pq(1+p+q)})xz + [q - p(p+q+1) + 2\sqrt{-pq(1+p+q)}]yz = 0$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega