

Quincena del 1 al 15 de Noviembre al 31 de Octubre de 2020.

Propuesto por Antonio Roberto Martínez Fernández, profesor de Matemáticas en el IES "Ruiz de Alda" (San Javier) y Miguel-Ángel Pérez García-Ortega, profesor de Matemáticas en el IES "Bartolomé-José Gallardo" de Campanario (Badajoz).

Problema 953.- *Dado un triángulo PQR , se considera un cuarto punto S que no está situado sobre ninguna de las tres rectas que contienen a dicho triángulo, de forma que los cuatro puntos determinan un cuadrilátero.*

Determinar el número de parábolas que circunscriben a dicho cuadrilátero en los siguientes casos:

A) *Es un cuadrilátero cóncavo.*

B) *Es un cuadrilátero convexo que no es un trapecio ni un paralelogramo.*

C) *Es un trapecio.*

D) *Es un paralelogramo.*

Martínez, A. R. y Pérez, M. A. (2020): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

1.- Solución sintética

Para intentar resolver este problema necesitamos de algunas puntualizaciones sobre proyectividades involutivas, homologías y cónicas proyectivas.

Involuciones sobre una recta proyectiva.

Una proyectividad h de la recta proyectiva en sí misma es una involución si $h^2 = I$, es decir, si $h^{-1} = h$.

Si un punto es doble en una involución, su conjugado armónico respecto de cualquier par de puntos homólogos, también lo es. Y en consecuencia una involución sobre una recta tiene dos puntos dobles o ninguno, es decir, **no existen proyectividades involutivas parabólicas sobre una recta.**

Proyectividades sobre una cónica. Involuciones

Diremos que dos series de puntos sobre una cónica $(A, B, C, \dots)$ y $(A', B', C', \dots)$ son proyectivas, (o bien, que tenemos definida una proyectividad sobre la cónica en la que se corresponden los puntos P, P') cuando lo son los haces que las proyectan desde dos puntos cualesquiera V y V' de la misma. (Los puntos de proyección pueden ser iguales). En cualquier caso, que la imagen de un punto A se construye mediante una sucesión de proyecciones y secciones.

Si en una proyectividad sobre una cónica se corresponden doblemente dos pares de puntos homólogos, también se corresponden cualquier otro par de puntos homólogos. Esta proyectividad es llamada *involución*.

Se verifica que las rectas PP' que unen pares de puntos homólogos, se cortan en un punto fijo C , llamado **centro de la involución**.

Así pues, dada una involución en una cónica, existe un punto C –centro de la involución– en el que concurren las rectas determinadas por los pares de puntos homólogos. De forma recíproca, si se da un punto C que no pertenezca a la cónica, el haz de rectas de centro ese punto define una involución sobre ella.

Teorema del cuadrivértice de Desargues (forma fuerte)

Dada una cónica y un cuadrivértice inscrito en ella, toda recta r que sea secante a la cónica, sin pasar por ninguno de los vértices del cuadrivértice, corta a la cónica y a los lados opuestos del cuadrivértice en pares de puntos homólogos en una misma involución.

Homologías

Una **homología** del plano proyectivo es una transformación puntual del plano en sí mismo tal que las rectas que unen los pares de puntos homólogos son concurrentes en un punto O llamado *centro de la homología*.

También se define una homología como aquella homografía del plano proyectivo, distinta de la identidad, que posee una recta de puntos fijos, llamada *eje de homología*.

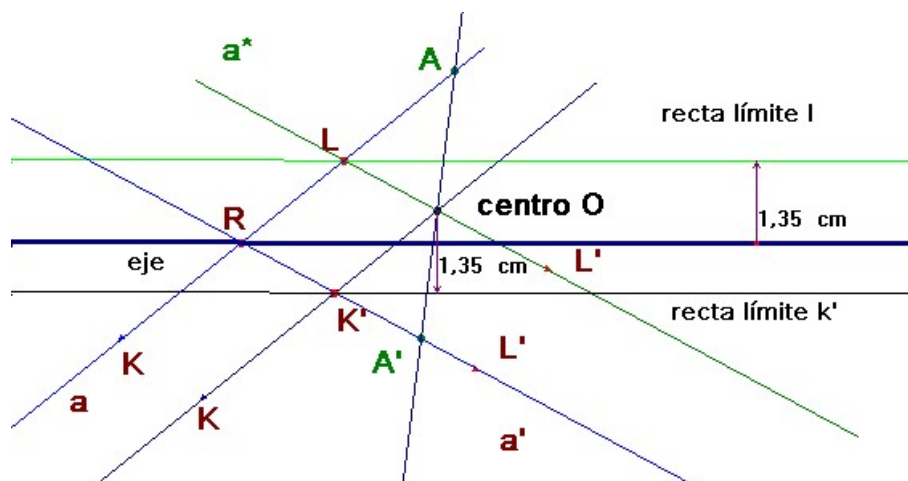
Rectas límite de una homología.

Son aquellas rectas homólogas de la recta del infinito del plano. Precisando: la recta límite l , es aquella que se transforma en la recta del infinito. La recta límite k' es la imagen de la recta del infinito. Son la antiimagen (recta l) y la imagen (recta k') de la recta del infinito en la homología de centro O y eje e .

Las rectas límite son paralelas al eje de homología, pues han de concurrir con él en la recta del infinito o recta impropia.

Construcción de las rectas límite.

De la definición dada de las rectas límite, se deduce que si dos rectas se cortan en un punto de la recta límite l , sus imágenes por la homología son dos rectas paralelas. Veamos cómo pueden determinarse las rectas límite de una homología donde se conocen el centro, el eje y un par de puntos homólogos.



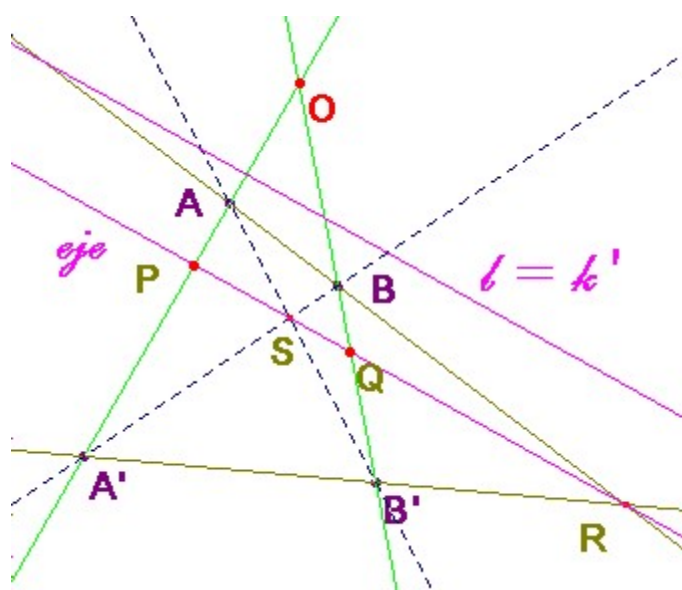
Para construir l bastará con encontrar un punto L de una recta dada a , cuya imagen sea un punto impropio L' de la recta homóloga a' . Cualquier recta paralela a a' la cortará en el punto impropio L' . Esto es, L es la intersección de a^* (paralela a a' por O) con a . Trazando una paralela al eje por L queda determinada la recta *límite* l .

Análogamente se procedería para construir la otra recta *límite* k' . El punto impropio K de a tiene por homólogo K' , intersección de a' con la paralela por el centro O a la recta a .

Puesto que $OLRK'$ es un paralelogramo, resulta que $OL = RK'$, por ello el centro de homología O dista de una recta *límite* igual que el eje dista de la otra.

Característica de una homología. Homologías involutivas.

En una homología la razón doble de la cuaterna formada por dos puntos homólogos cualesquiera, el centro y el punto de intersección de la recta que los une con el eje es constante y se llama característica de la homología⁽¹⁾.



Si esta razón doble es -1 , la homología se llama **armónica** y entonces $(AA'OP) = (A'AOP)$ ⁽²⁾ igualdad que pone de manifiesto que la imagen de A' es el punto A , es decir que la homología es **involutiva** por corresponderse doblemente todos los pares de puntos homólogos. En este caso, al ser involutiva, las rectas l y k' se confunden, y para encontrarlas

basta con trazar la recta paralela al eje que equidista de éste y del centro. Las rectas $A'B$ y AB' son homólogas y por ello se encuentran en un punto S del eje de homología.

De todo lo visto anteriormente se deduce que toda involución sobre una cónica es la restricción a ésta de una **homología armónica**. El centro de la homología es el centro de la involución y su eje, la polar de éste respecto de la cónica.

Parábolas de un haz.

Todas las cónicas que pasan por cuatro puntos $PQRS$ tres cualesquiera de ellos no alineados, constituyen un haz. Del teorema del cuadrivértice se desprende que *los pares de puntos de intersección de una recta r que no pasa por ningún vértice con las cónicas de un haz pertenecen a una misma involución: la determinada sobre la recta por los pares de lados opuestos del cuadrivértice.*

Los puntos dobles de esta involución, si los hay A y A^* , serán los puntos de tangencia de las cónicas del haz con la recta en cuestión. Por tanto, habrá dos cónicas del haz o ninguna (pues no existen involuciones parabólicas) tangentes a la recta r .

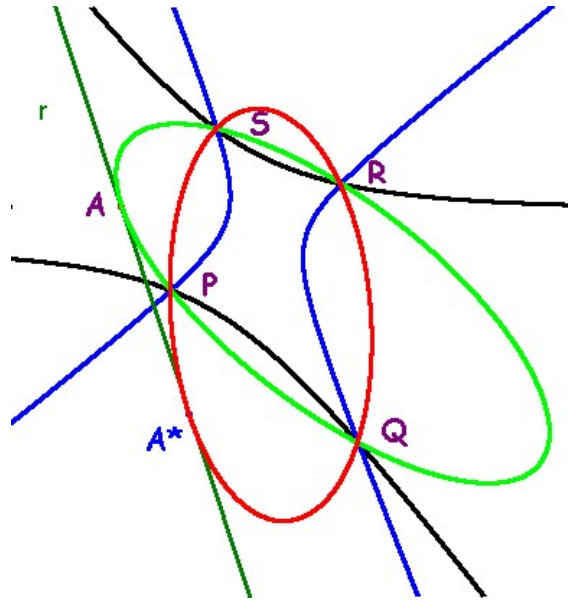
1.- Es inmediato, la cuaterna $(AA'OP)$ se proyecta desde R en la cuaterna $(BB'OQ)$, y por tanto, son iguales.

2.- La razón doble se invierte al permutar dos puntos.

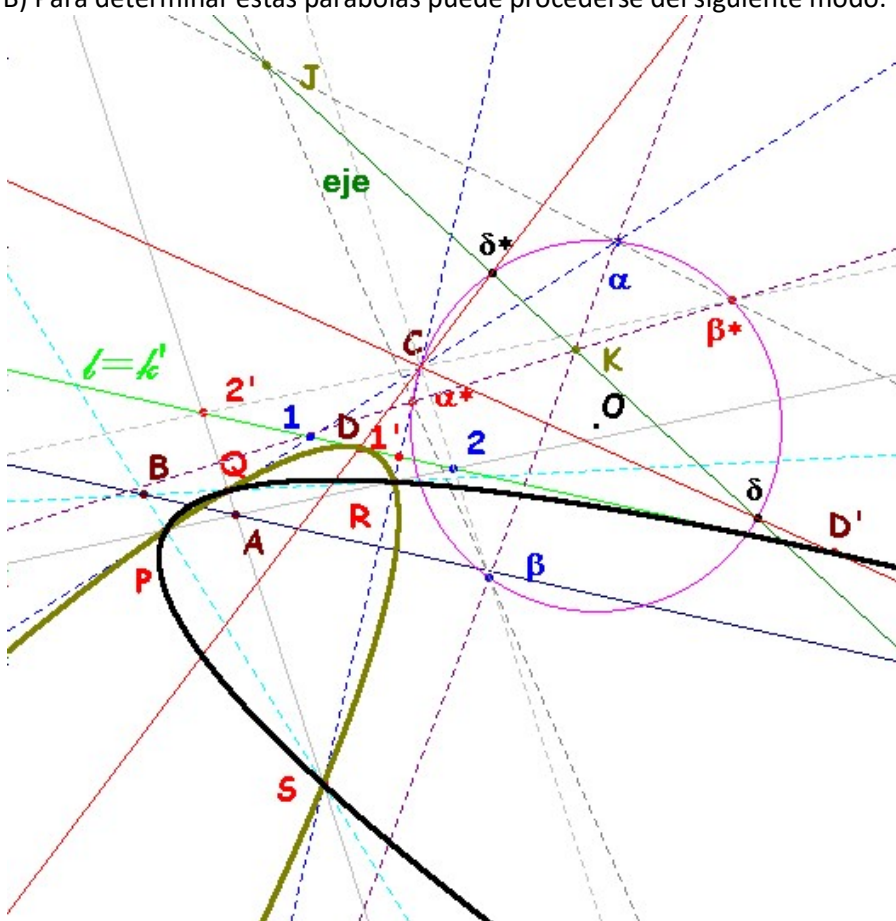
En particular, si la recta r es la recta del infinito, la conclusión es que **de todas las cónicas del haz, a lo sumo hay 2 parábolas.**

D) Si el cuadrivértice es un paralelogramo, el centro de éste es el de todas las cónicas del haz, por tanto, las únicas parábolas del mismo son los pares de lados paralelos del paralelogramo.

C) Si es un trapecio hay dos parábolas, una de ellas, la definida por las dos bases.



B) Para determinar estas parábolas puede procederse del siguiente modo:



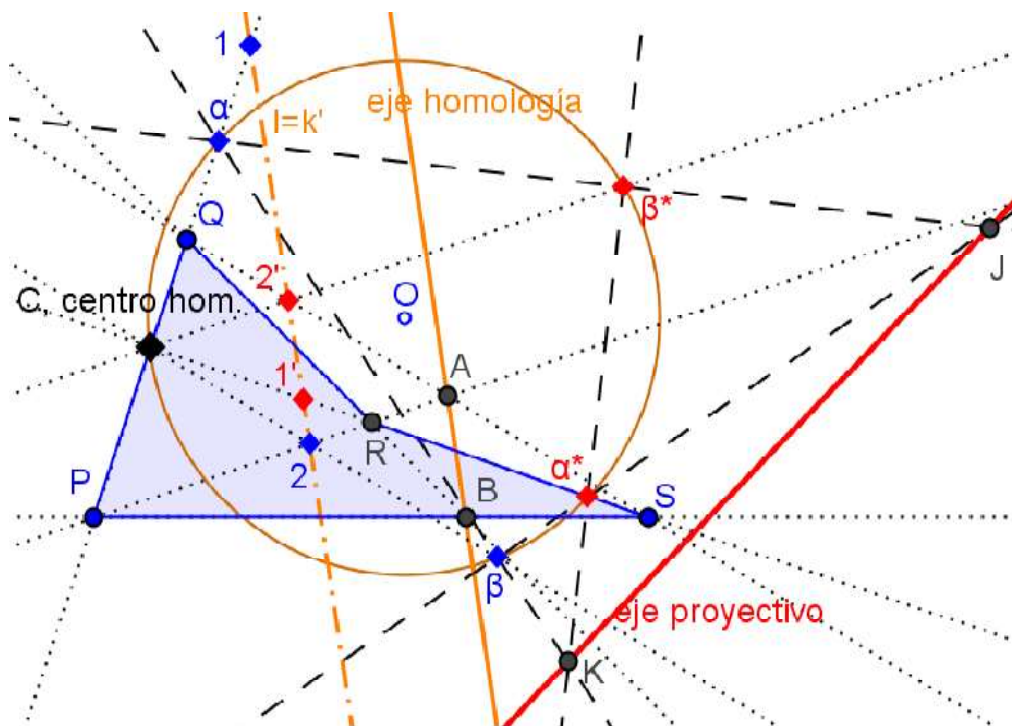
Ya hemos visto que un cuadrivértice determina una homología armónica en el plano y que las homologías armónicas están en correspondencia biunívoca con las proyectividades involutivas sobre una cónica.

Así pues, con los puntos del cuadrivértice determinamos el centro y el eje de la homología: un punto diagonal C y el lado opuesto del triángulo diagonal AB . Éste es su polar **respecto de todas las cónicas del haz** y es el eje de la homología armónica. Sus rectas límite son coincidentes, $l = k'$, y se determinan de inmediato utilizando la propiedad que poseen de equidistar del centro y del eje de homología.

Los puntos de corte de las cónicas del haz con esta recta límite se corresponden por la homología con los puntos que éstas tienen en la recta del infinito. Si la involución definida por el cuadrivértice en l tiene puntos dobles, las cónicas del haz que pasan por cada uno de ellos son las dos únicas parábolas que hay en el haz.

Para hallarlos proyectamos esta recta sobre una circunferencia desde un punto cualquiera de la misma: puede ser el propio centro C de la involución. Hallamos en ella los puntos dobles δ, δ^* que, nuevamente proyectados sobre la recta límite nos dan D, D' puntos de tangencia que corresponden a las dos parábolas del haz.

A) Si el cuadrilátero es cóncavo, no hay parábolas en el haz



La construcción es la misma que en el caso anterior tomando un punto R en el interior del triángulo PQS . No hay puntos dobles pues la recta JK no corta a la circunferencia $(O; C)$.

2.- Solución algebraica.

Como lo importante de recinto es la forma y no sus dimensiones concretas, vamos a utilizar un recinto con tres puntos fijos y un cuarto moviéndose sobre una recta, de forma que según la posición de este último podremos tener, salvo paralelogramos, cualquiera de los cuadriláteros especificados en el enunciado. Tomaremos los siguientes puntos:

$P(0,0)$; $Q(1,3)$; $R(3,\alpha)$; $S(6,0)$. Para $\alpha = 0$, R estaría alineado con P y S . Para $\alpha = 1.8$ el alineamiento se produce con S y Q y finalmente, para $\alpha = 9$, R está alineado con P y Q . Estos valores de α los excluimos de inmediato para tratar el problema.

Con los valores restantes de α y estos puntos, el haz de cónicas definido por ellos es

$$(y - 3x)(\alpha x + 3y - 6\alpha) + \lambda y((\alpha - 3)x - 2y + (9 - \alpha)) = 0$$

y suprimiendo los términos de grado inferior a 2 nos queda la ecuación de los puntos del infinito de la cónica

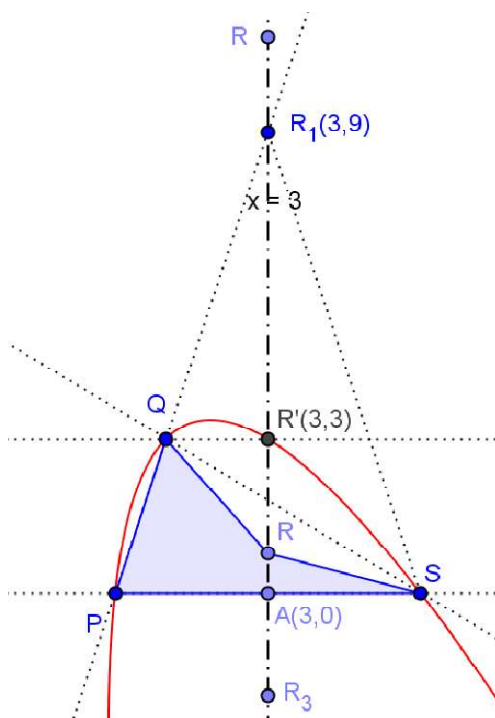
$$-3\alpha x^2 + xy[\alpha(\lambda + 1) - 3\lambda - 9] + y^2(3 - 2\lambda) = 0$$

Considerada como una ecuación en $m = \frac{x}{y}$ su discriminante es

$$[\alpha(\lambda + 1) - 3\lambda - 9]^2 + 12\alpha(3 - 2\lambda)$$

Habrán parábolas cuando se anule, es decir, si lo expresamos en función del parámetro λ , cuando

$$\lambda^2(\alpha - 3)^2 + 2\lambda(\alpha^2 - 24\alpha + 27) + (\alpha^2 + 18\alpha + 81) = 0$$



Esta ecuación en λ tendrá soluciones cuando su discriminante sea positivo, esto es, cuando y sólo cuando

$$\Delta = (\alpha^2 - 24\alpha + 27)^2 - (\alpha - 3)^2(\alpha^2 + 18\alpha + 81) = 12\alpha(9 - \alpha)(5\alpha - 9) > 0$$

El signo del discriminante, en función de los valores de α es:

Positivo en $(-\infty, 0) \cup (\frac{9}{5}, 9)$ y negativo en $(0, \frac{9}{5}) \cup (9, +\infty)$.

No hay parábolas pues, si el cuadrilátero es $PQRS$ como en la figura a la izquierda, o sea, cuando $\alpha \in (0, \frac{9}{5}) \cup (9, +\infty)$ que corresponde en este caso particular a un cuadrilátero cóncavo.

Si $9/5 < \alpha < 9$ el discriminante Δ es positivo.

Hay dos parábolas en el haz. Para $\alpha = 3$ el cuadrilátero es un trapecio y hemos dibujado la parábola (no degenerada) que lo circunscribe.

Su ecuación es $9x^2 + 6xy + y^2 - 54x + 6y = 0$. ■