Problema 954. (propuesto por Antonio Casas Pérez) Dados un triángulo ABC y un punto P distinto de A, B y C, probar que el lugar geométrico de los centros del haz de cónicas que pasan por estos cuatro puntos es una cónica que pasa por los vértices del triángulo ceviano del punto P respecto del triángulo ABC.

Solución:

Vamos a distinguir dos casos:

① Si el punto P está situado sobre la recta AB (si estuviese situado sobre las rectas BC o CA se razonaría de forma totalmente análoga), entonces, su triángulo ceviano es BAP y todas las cónicas del haz de cónicas que pasan por los puntos A, B, C y D deben contener a la recta AB y a otra recta que pase por el punto C, siendo el centro de cada una de estas cónicas el punto de intersección entre ambas rectas cuando sean secantes o el punto del infinito de la recta AB cuando sean paralelas. Por tanto, el lugar geométrico de los centros del haz de cónicas que pasan por estos cuatro puntos es la recta doble AB, que pasa por los vértices del triángulo ceviano BAP del punto P.

② Si el punto P no está situado sobre ninguna de las tres rectas que contienen a los lados del triángulo ABC, considerando coordenadas baricéntricas con respecto a dicho triángulo, como la ecuación de una cónica general que pase por sus vértices es:

$$uxy + vxz + wyz = 0 \ (u, v, w \in \mathbb{R})$$

imponiendo que pase por el punto $P = (1 : p : q) \ (p \neq 0 \neq q)$, obtenemos que:

$$pu + qv + pqw = 0 \Rightarrow u = -\frac{q(v + pw)}{p}$$

por lo que la ecuación general de una cónica que pase por los puntos A, B, C y D es:

$$-q(v + pw)xy + pvxz + pwyz = 0 \ (v, w \in \mathbb{R})$$

estando las coordenadas de su centro (conjugado de la recta del infinito) determinadas por la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -q(v+pw) & pv \\ -q(v+pw) & 0 & pw \\ pv & pw & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -q(v+pw) & pv \\ -q(v+pw) & 0 & pw \\ pv & pw & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

es decir, su centro es:

$$Q = (-pw[(q-p)v + p(q+1)w] : -pv[(p+q)v + p(q-1)w] : -q(v+pw)[(p+q)v + p(q+1)w])$$

por lo que, eliminando los parámetros v, w y θ del siguiente sistema de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = -p\theta w[(q-p)v + p(q+1)w] \\ y = -p\theta v[(p+q)v + p(q-1)w] \\ z = -q\theta(v+pw)[(p+q)v + p(q+1)w] \end{cases}$$

resulta que el lugar geométrico de los centros del haz de cónicas que pasan por estos cuatro puntos es la cónica de ecuación:

$$pqx^2 + qy^2 + pz^2 - q(p+1)xy - p(q+1)xz - (p+q)yz = 0$$

pue pasa por los vértices del triángulo ceviano DEF del punto P con respecto al triángulo ABC, cuyas coordenadas:

$$\begin{cases} D = (0 : p : q) \\ E = (1 : 0 : q) \\ F = (1 : p : 0) \end{cases}$$

verifican la ecuación de dicha cónica. Además, como:

$$\begin{vmatrix} 2pq & -q(p+1) & -p(q+1) \\ -q(p+1) & 2q & -(p+q) \\ -p(q+1) & -(p+q) & 2p \end{vmatrix} = -4pq(p+1)(q+1)(p+q)$$

entonces:

❶ Esta cónica será degenerada cuando el punto P esté situado sobre la recta paralela a cada lado pasando por el vértice opuesto, por lo que vamos a distinguir tres casos:

☺ Si $p+1=0$, entonces, el punto P está situado sobre la recta paralela a AB pasando por C, estando los puntos del infinito del par de rectas correspondientes determinados por las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = (x+y-z)(qx-qy-z) \\ 0 = x+y+z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = (1 : -1 : 0) \\ I_2 = (q-1 : q+1 : -2q) \end{cases}$$

y, por tanto, se trata de un par de rectas secantes.

😐 Si $q+1=0$, entonces, el punto P está situado sobre la recta paralela a AC pasando por B, estando los puntos del infinito del par de rectas correspondientes determinados por las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = (x-y+z)(px+y-pz) \\ 0 = x+y+z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = (1 : 0 : -1) \\ I_2 = (p-1 : -2p : p+1) \end{cases}$$

y, por tanto, se trata de un par de rectas secantes.

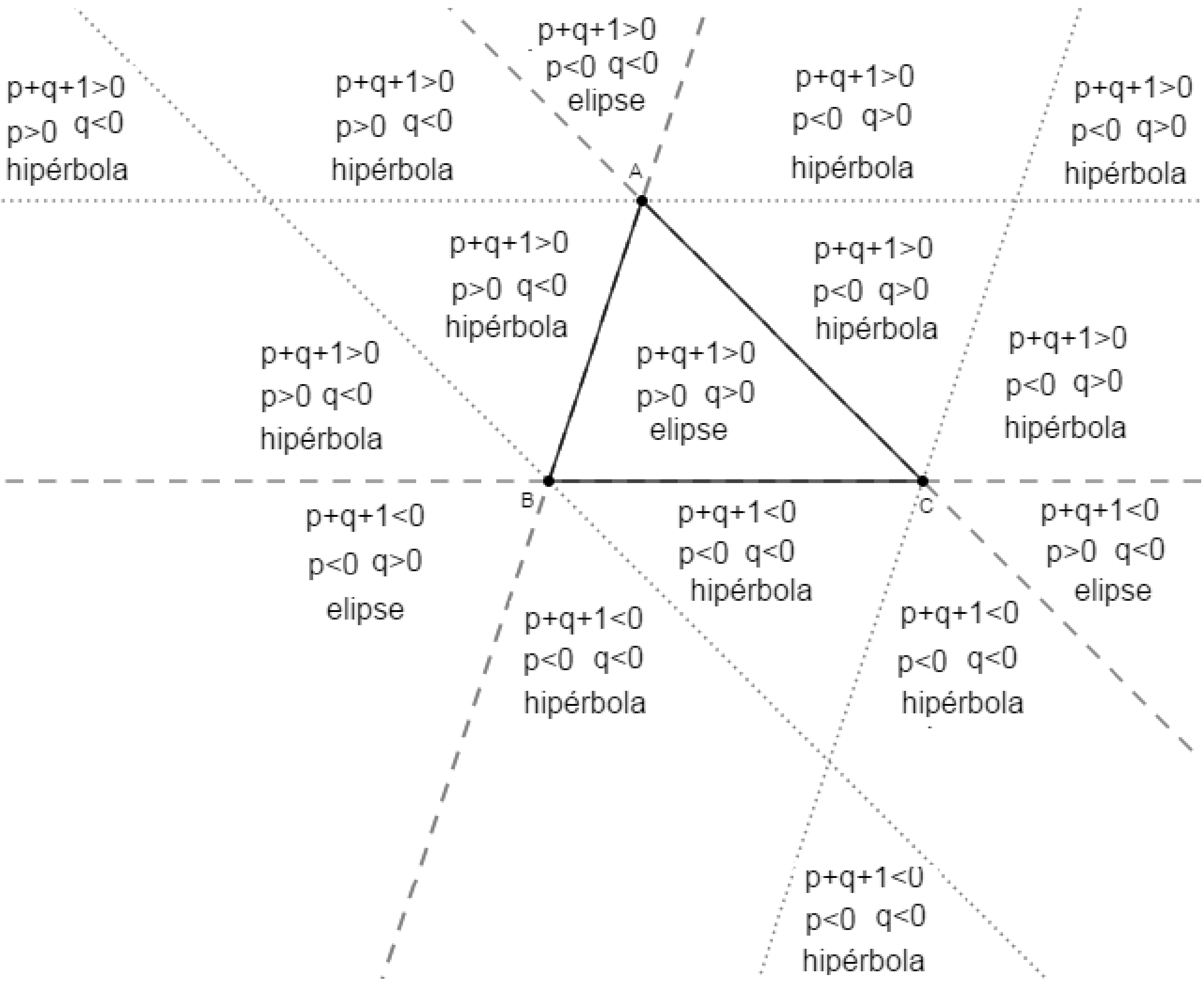
☹ Si $p+q=0$, entonces, el punto P está situado sobre la recta paralela a BC pasando por A, estando los puntos del infinito del par de rectas correspondientes determinados por las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0=(x-y-z)(px-y+z) \\ 0=x+y+z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1=(0:1:-1) \\ I_2=(-2:1-p:p+1) \end{cases}$$

y, por tanto, se trata de un par de rectas secantes.

❷ Esta cónica será no degenerada cuando el punto P no esté situado sobre ninguna de las rectas paralelas a cada lado pasando por el vértice opuesto, estando sus puntos del infinito determinados por las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0=pqx^2+qy^2+pz^2-q(p+1)xy-p(q+1)xz-(p+q)yz \\ 0=x+y+z \end{cases}$$



es decir:

$$\begin{cases} I_1 = \left(p+q : -p - \sqrt{-pq(p+q+1)} : -q + \sqrt{-pq(p+q+1)}\right) \\ I_2 = \left(p+q : -p + \sqrt{-pq(p+q+1)} : -q - \sqrt{-pq(p+q+1)}\right) \end{cases}$$

y siendo $I_1 \neq I_2$ (ya que $p+q \neq 0$ y $pq(p+q+1)$), por lo que se trata de una elipse o una hipérbola:

$$\begin{cases} pq(p+q+1) > 0 \;\rightarrow\; \text{elipse} \\ pq(p+q+1) < 0 \;\rightarrow\; \text{hipérbola} \end{cases}$$