TRIÁNGULOS CABRI

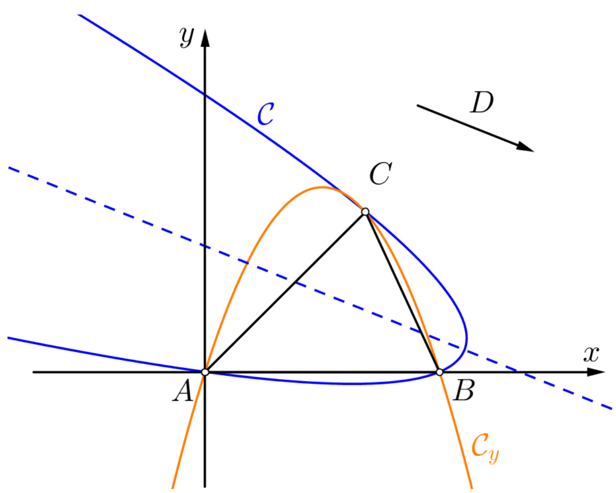
ANTONIO ROBERTO MARTÍNEZ FERNÁNDEZ

Problema 955. En el plano afín, dados un triángulo ABC y una dirección D, probar que existe una única cónica de tipo parabólico que circunscribe a dicho triángulo y es tal que sus diámetros son paralelos a la dirección dada.

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega *(IES Bartolomé-José Gallardo, Campanario, Badajoz)*

Solución: Consideremos el plano afín $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ inmerso en el plano proyectivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ vía $(x, y) \rightsquigarrow [x, y, 1]$. El enunciado es equivalente a probar que, dado un punto del infinito $D \in L_\infty$, existe una única cónica proyectiva $\overline{\mathcal{C}}$ de tipo parabólico que pasa por los puntos A, B, C, D.

Consideremos un referencial cartesiano $\mathcal{R}$ de manera que las coordenadas de los vértices del triángulo sean $A = (0, 0)$, $B = (k, 0)$ y $C = (l, m)$, con $m \neq 0$. Pongamos la ecuación general de $\overline{\mathcal{C}}$ como $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2exz + 2fyz + dz^2 = 0$. Si $\overline{\mathcal{C}}$ ha de ser de tipo parabólico, se tiene que cumplir $ac - b^2 = 0$.



Supongamos que $c \neq 0$, de modo que $a = \frac{b^2}{c}$. Imponiendo que $\overline{\mathcal{C}}$ tiene que pasar por A, B, C, se obtiene que $d = 0$, $e = -\frac{b^2 k}{2c}$ y $f = \frac{b^2 l(k-l) - 2bclm - c^2 m^2}{2cm}$. Supongamos que $D = [1, r, 0]$. De la condición $D \in \overline{\mathcal{C}}$ obtenemos también que $b = -cr$. Sustituyendo en la ecuación de $\overline{\mathcal{C}}$, operando y simplificando tenemos que hay una única cónica $\mathcal{C}$ de tipo parabólico que circunscribe a

Date: 1 de noviembre de 2020.

ABC y cuyo eje es paralelo a la dirección de D. Su ecuación se obtiene haciendo $z = 1$, y es:

$$\boxed{\mathcal{C} : \, mr^2x^2 - 2mrxy + my^2 - mkr^2x + (klr^2 - l^2r^2 + 2lmr - m^2)y = 0}$$

Observemos que, si $r \neq 0$, entonces $D = [1, r, 0] = \left[\frac{1}{r}, 1, 0\right]$. Dividiendo la ecuación de $\mathcal{C}$ por r^2 y haciendo $r \to \infty$, tenemos la única cónica de tipo parabólico cuyo eje es paralelo al eje de ordenadas (punto del infinito $[0, 1, 0]$):

$$\mathcal{C}_y : \, mx^2 - mkx + l(k - l)y = 0.$$

El caso $c = 0$ se corresponde con la cónica $\mathcal{C}_y$.

$\square$

Antonio Roberto Martínez Fernández
IES Ruiz de Alda, San Javier