

TRIÁNGULOS CABRI

Problema 955. (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) En el plano afín, dados un triángulo ABC y una dirección D , probar que existe una única cónica de tipo parabólico que circunscribe a dicho triángulo y es tal que sus diámetros son paralelos a la dirección dada.

Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC , la ecuación de una cónica general que circunscribe a dicho triángulo es:

$$uxy + vxz + wyz = 0 \quad (u, v, w \in \mathbb{R})$$

estando sus puntos del infinito determinados por las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = uxy + vxz + wyz \\ 0 = x + y + z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = (2w : u - v - w - \sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - 2uv - 2uw - 2vw} : -u + v - w + \sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - 2uv - 2uw - 2vw}) \\ I_2 = (2w : u - v - w + \sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - 2uv - 2uw - 2vw} : -u + v - w - \sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - 2uv - 2uw - 2vw}) \end{cases}$$

por lo que, imponiendo que se trate de una cónica de tipo parabólico, obtenemos que:

$$I_1 = I_2 \Rightarrow u^2 + v^2 + w^2 - 2uv - 2uw - 2vw = 0 \Rightarrow u = v + w \pm 2\sqrt{vw} \quad (vw \geq 0)$$

y, por tanto, la ecuación de una cónica general de tipo parabólico que circunscribe al triángulo ABC es:

$$(v + w \pm 2\sqrt{vw})xy + vxz + wyz = 0 \quad (vw \geq 0)$$

Además, si $D = (p : q : -p - q)$ con $p, q \in \mathbb{R}$ no simultáneamente nulos, vamos a distinguir cuatro casos:

- ① Si $p = 0$, entonces, $D = (0 : 1 : -1)$ (punto del infinito de la recta BC), por lo que, imponiendo que este punto esté situado sobre nuestra cónica, obtenemos que $w = 0$ y, por tanto, hay una única cónica de tipo parabólico que circunscribe al triángulo ABC y cuyos diámetros tienen esta dirección, siendo su ecuación:

$$vx(y + z) = 0 \quad (v \neq 0)$$

es decir:

$$x(y + z) = 0$$

Esta cónica es un par de rectas paralelas, formado por la recta BC y la recta paralela a ella pasando por el punto A .

- ② Si $q = 0$, entonces, $D = (1 : 0 : -1)$ (punto del infinito de la recta AC), por lo que, imponiendo que este punto esté situado sobre nuestra cónica, obtenemos que $v = 0$ y, por tanto, hay una única cónica de tipo parabólico que circunscribe al triángulo ABC y cuyos diámetros tienen esta dirección, siendo su ecuación:

$$wy(x + z) = 0 \quad (w \neq 0)$$

es decir:

$$y(x + z) = 0$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

TRIÁNGULOS CABRI

Esta cónica es un par de rectas paralelas, formado por la recta AC y la recta paralela a ella pasando por el punto B .

- ③ Si $p + q = 0$, entonces, $D = (1 : -1 : 0)$ (punto del infinito de la recta AB), por lo que, imponiendo que este punto esté situado sobre nuestra cónica, obtenemos que $\sqrt{v} \pm \sqrt{w} = 0$ y, por tanto, hay una única cónica de tipo parabólico que circunscribe al triángulo ABC y cuyos diámetros tienen esta dirección, siendo su ecuación:

$$vz(x + y) = 0 \quad (v \neq 0)$$

es decir:

$$z(x + y) = 0$$

Esta cónica es un par de rectas paralelas, formado por la recta AB y la recta paralela a ella pasando por el punto C .

- ④ Si $pq(p + q) \neq 0$, imponiendo que el punto $D = (p : q : -p - q)$ esté situado sobre nuestra cónica, obtenemos que:

$$p\sqrt{v} \mp q\sqrt{w} = 0 \quad (v, w \geq 0) \Rightarrow \sqrt{v} = \pm \frac{q\sqrt{w}}{p} \Rightarrow v = \frac{q^2 w}{p^2}$$

y, por tanto, hay una única cónica de tipo parabólico que circunscribe al triángulo ABC y cuyos ejes tienen esta dirección, siendo su ecuación:

$$w[(p + q)^2 xy + q^2 xz + p^2 yz] = 0 \quad (w \neq 0)$$

es decir:

$$(p + q)^2 xy + q^2 xz + p^2 yz = 0$$

Además, esta cónica es una parábola, ya que es no degenerada, pues:

$$\begin{vmatrix} 0 & (p + q)^2 & q^2 \\ (p + q)^2 & 0 & p^2 \\ q^2 & p^2 & 0 \end{vmatrix} = 2[pq(p + q)]^2 \neq 0$$

TRIÁNGULOS CABRI

Problema 955. (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) En el plano afín real, dados un triángulo ABC y una dirección D , probar que existe una única cónica de tipo parabólico que circunscribe a dicho triángulo y es tal que sus diámetros son paralelos a la dirección dada.

Solución:

Considerando la referencia afín $\{B; \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\}$, al ser:

$$\begin{cases} A = (0, 1) \\ B = (0, 0) \\ C = (1, 0) \end{cases} \Rightarrow AB \equiv x + y - 1 = 0$$

como la ecuación de una cónica general es:

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = 0 \quad (a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R})$$

imponiendo que pase por los puntos A , B y C , obtenemos que:

$$\begin{cases} a = -2d \\ b = -2e \\ f = 0 \end{cases}$$

por lo que la ecuación en coordenadas homogéneas de una cónica general de tipo parabólico que circunscribe al triángulo ABC es:

$$dx^2 + ey^2 - cxy - dxz - eyz = 0 \quad (c, d, e \in \mathbb{R})$$

siendo:

$$\begin{vmatrix} 2d & -c \\ -c & 2e \end{vmatrix} = 4de - c^2 = 0$$

Además, si $D = (p, q, 0)$ con $p, q \in \mathbb{R}$ no simultáneamente nulos, vamos a distinguir cuatro casos:

- ① Si $q = 0$, entonces, $D = (1, 0, 0)$ (punto del infinito de la recta BC), por lo que, imponiendo que este punto esté situado sobre nuestra cónica, obtenemos que:

$$d = 0 \xRightarrow{c^2 = 4de} c = 0$$

y, por tanto, hay una única cónica de tipo parabólico que circunscribe al triángulo ABC y cuyos diámetros tienen esta dirección, siendo su ecuación:

$$ey(y - 1) = 0 \quad (e \neq 0)$$

es decir:

$$y(y - 1) = 0$$

Esta cónica es un par de rectas paralelas, formado por la recta BC y la recta paralela a ella pasando por el punto A .

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

TRIÁNGULOS CABRI

- ② Si $p = 0$, entonces, $D = (0, 1, 0)$ (punto del infinito de la recta BA), por lo que, imponiendo que este punto esté situado sobre nuestra cónica, obtenemos que:

$$e = 0 \xRightarrow{c^2=4de} c = 0$$

y, por tanto, hay una única cónica de tipo parabólico que circunscribe al triángulo ABC y cuyos diámetros tienen esta dirección, siendo su ecuación:

$$dx(x-1) = 0 \quad (d \neq 0)$$

es decir:

$$x(x-1) = 0$$

Esta cónica es un par de rectas paralelas, formado por la recta BA y la recta paralela a ella pasando por el punto C .

- ③ Si $p + q = 0$, entonces, $D = (1, -1, 0)$ (punto del infinito de la recta AC), por lo que, imponiendo que este punto esté situado sobre nuestra cónica obtenemos que:

$$c + d + e = 0 \xRightarrow{c^2=4de} \begin{cases} c = -2e \\ d = e \end{cases}$$

y, por tanto, hay una única cónica de tipo parabólico que circunscribe al triángulo ABC y cuyos diámetros tienen esta dirección, siendo su ecuación:

$$e(x+y)(x+y-1) = 0 \quad (e \neq 0)$$

es decir:

$$(x+y)(x+y-1) = 0$$

Esta cónica es un par de rectas paralelas, formado por la recta AC y la recta paralela a ella pasando por el punto B .

- ④ Si $pq(p+q) \neq 0$, imponiendo que el punto $D = (p, q, 0)$ esté situado sobre nuestra cónica, obtenemos que:

$$-cpq + dp^2 + eq^2 = 0 \xRightarrow{c^2=4de} \begin{cases} c = \frac{2eq}{p} \\ d = \frac{eq^2}{p^2} \end{cases}$$

y, por tanto, hay una única cónica de tipo parabólico que circunscribe al triángulo ABC y cuyos ejes tienen esta dirección, siendo su ecuación:

$$e(q^2x^2 + p^2y^2 - 2pqxy - q^2x - p^2y) = 0 \quad (e \neq 0)$$

es decir:

$$q^2x^2 + p^2y^2 - 2pqxy - q^2x - p^2y = 0$$

TRIÁNGULOS CABRI

Además, esta cónica es una parábola, ya que es no degenerada, pues:

$$\begin{vmatrix} 0 & -q^2 & -p^2 \\ -q^2 & 2q^2 & -2pq \\ -p^2 & -2pq & 2p^2 \end{vmatrix} = -+2[pq(p+q)]^2 \neq 0$$