Problema 956.-

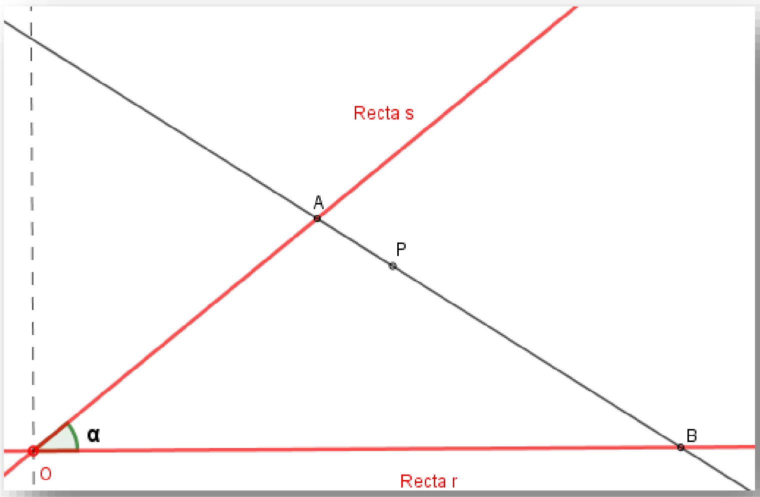
Propuesto por Antonio Casas Pérez, profesor jubilado del Departamento de Matemática Aplicada al Urbanismo, a la Edificación y al Medio Ambiente, Universidad Politécnica de Madrid.

Dados un par de rectas r, s que se cortan en el punto O y un punto P situado en una de las cuatro zonas en que r y s dividen al plano, trazar una recta que pase por P y se apoye en r y s en los puntos A, B de forma que P pertenezca al segmento AB y el área del ΔOAB sea mínima.

Casas, A. (2020): Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros. Córdoba.

Usaremos el sistema de referencia cartesiano que nos proporciona el punto O, como origen de coordenadas y alguna de las rectas $(r\ o\ s)$ que pasan por dicho punto. La situación, sin pérdida de generalidad, puede ser esta que se muestra en la imagen:



Por tanto, según este sistema de referencia, las recta r y s tendrán de ecuaciones,

$r \equiv y = 0;$

$s \equiv y = k \cdot x; k > 0,$

$siendo\ k = \tan\alpha.$

Los puntos O y P, serán los de coordenadas:

$O = (0,0)\ \ y\ \ P = (m, n).$

Para que el punto P pertenezca a la región elegida de entre las cuatro comprendidas entre la recta $r\ y\ s$, debe cumplir una serie de restricciones. En concreto, para la elegida en nuestro caso, debe suceder que:

$$\{m, n \geq 0, \frac{n}{m} \leq k\}$$

Una recta variable que pase por el punto P será la de ecuación $y = t(x-m) + n; t \in R; t \neq k.$

Por tanto, los puntos A y B serán los de coordenadas,

$$A = \left(\frac{m\,t-n}{t-k}, k\frac{m\,t-n}{t-k}\right); B = \left(\frac{t\,m-n}{t}, 0\right)$$

De modo que S, Área del ΔOAB, vendrá dada por la expresión $S = \frac{-1}{2} Det\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right] = \frac{k\cdot(n-m\,t)^2}{2t(t-k)}$

Considerando la función $f(t) = \frac{k\cdot(n-m\,t)^2}{2t(t-k)}$; $(k \neq t)$

Podemos establecer que:

$$f'[t] = \frac{k \cdot (m\,t - n) \cdot (2nt - k(n + mt))}{2t^2(k-t)^2} = 0 \rightarrow \{t = \frac{n}{m}; t = \frac{k\,n}{2n - km}\; si\; k \neq \frac{2n}{m}\}$$

Observamos que si $t = \frac{n}{m}$, entonces $A = B = O$; (Caso degenerado)

Nos quedamos con el valor $t = \frac{k\,n}{2n-km}\; si\; k \neq \frac{2n}{m}$

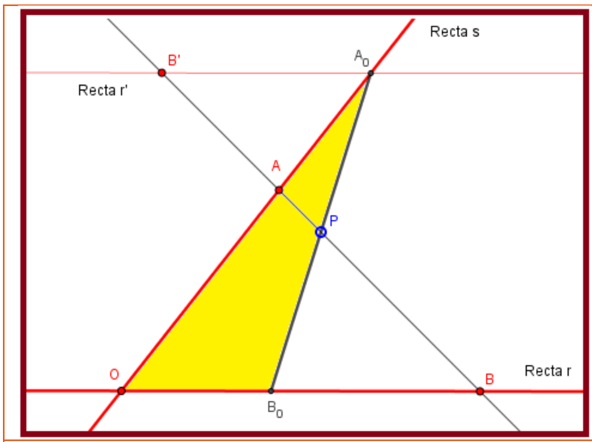
Sustituyendo este valor de t, obtenemos las coordenadas de los puntos A y B:

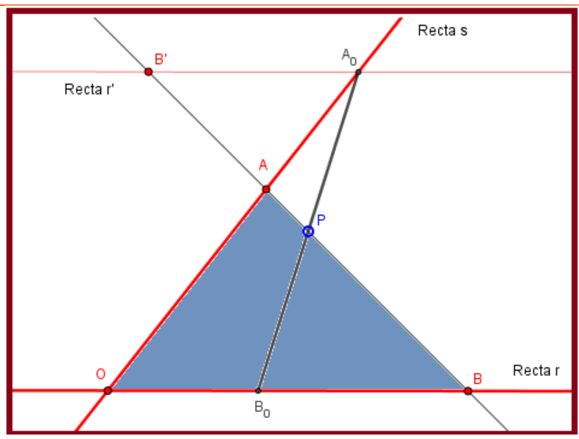
$$A_0 = \left(\frac{2n}{k}, 2n\right); B_0 = \left(2m - \frac{2n}{k}, 0\right)$$

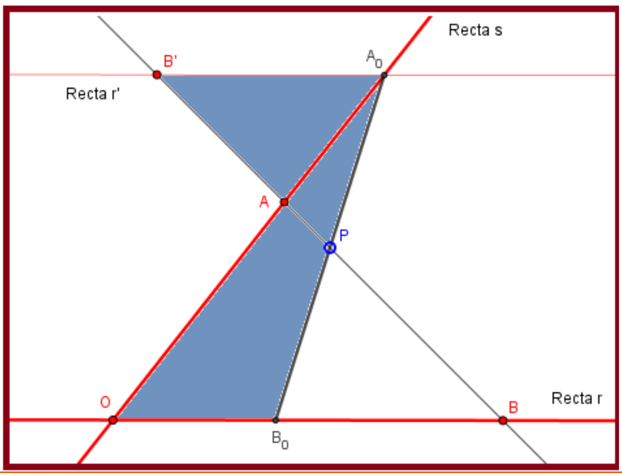
Siendo así, resulta que el punto medio de ambos, sería el propio $P = (m, n)$. Resultaría así fácil determinar los puntos $A_0\ y\ B_0$ por una simetría central de r sobre el punto P. Esta recta r' determinaría con la recta s el punto A_0 y a continuación el punto B_0 sería el transformado por la simetría central de centro P del punto A_0.

En el caso que $k = \frac{2n}{m}$, es evidente que la recta perpendicular a la recta r por el punto P determinaría el triángulo rectángulo OAB, siendo P el punto medio de A y B. Vemos por tanto, que este caso estaría también englobado en el caso anterior más general.

El triángulo ΔOA_0B_0 es el que daría el valor del área mínima como vemos a continuación.







Como vemos el exceso del área del ΔOAB sobre el área del ΔOA_0B_0 está en el área del $\Delta AA_0B'$.