

TRIÁNGULOS CABRI

Problema 956. (propuesto por Antonio Casas Pérez) Dados un par de rectas r y s que se cortan en un punto A y un punto P situado en una de las cuatro zonas en que r y s dividen al plano, trazar una recta que pase por P y se apoye en r y s en los puntos M y N , respectivamente, de forma que el punto P pertenezca al segmento MN y el área del triángulo AMN sea mínima.

Solución:

La recta que pasa por el punto P y es perpendicular a la bisectriz interior del ángulo formado por las rectas r y s en la región donde se encuentra el punto P corta a las rectas r y s en los puntos B y C , respectivamente, de forma que el triángulo ABC es isósceles. Llamando θ a dicho ángulo, $a = BC$ y $AB = b = BC$ y considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC , si $P = (0 : p : 1 - p)$ ($0 < p < 1$), como la ecuación de una recta general que no pase por el punto A es:

$$x + vy + wz = 0 \quad (v, w \in \mathbb{R})$$

imponiendo que pase por el punto P , obtenemos que:

$$vp + w(1 - p) = 0 \Rightarrow v = \frac{(p - 1)w}{p}$$

por lo que la ecuación de una recta general que pasa por el punto P sin pasar por el punto A (para que corte a las rectas r y s en dos puntos distintos) es:

$$px + (p - 1)wy + pwz = 0$$

siendo $1 \neq w \neq \frac{p}{p - 1}$ (para que esta recta no sea paralela ni a r ni a s) y, por tanto:

$$\begin{cases} M = ((1 - p)w : p : 0) \\ N = (-w : 0 : 1) \end{cases}$$

Además, como:

$$\frac{(AMN)}{(ABC)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (1 - p)w & p & 0 \\ -w & 0 & 1 \end{vmatrix}}{[(1 - p)w + p](1 - w)} = \frac{p}{[(1 - p)w + p](1 - w)}$$

entonces, tenemos que minimizar la función $f : \left(\frac{p}{p - 1}, 1\right) \rightarrow (0, +\infty)$ definida por:

$$f(w) = \frac{p}{[(1 - p)w + p](1 - w)}$$

que verifica que:

$$\forall w \in \left(\frac{p}{p - 1}, 1\right) : f'(w) = -\frac{p[2(p - 1)w - 2p + 1]}{[(1 - p)w + p]^2(1 - w)^2} = 0 \Leftrightarrow w = \frac{2p - 1}{2(p - 1)}$$

y que:

$$\forall w \in \left(\frac{p}{p - 1}, 1\right) : f''(w) = \frac{2p(3p^2w^2 - 6p^2w + 3p^2 - 6pw^2 + 9pw - 3p + 3w^2 - 3w + 1)}{[(1 - p)w + p]^2(1 - w)^2}$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

TRIÁNGULOS CABRI

por lo que:

$$f''\left(\frac{2p-1}{2(p-1)}\right) = 32p(1-p)^3 > 0$$

y, por tanto, el triángulo AMN tendrá área mínima cuando $w = \frac{2p-1}{2(p-1)}$, siendo el valor de dicho área mínima:

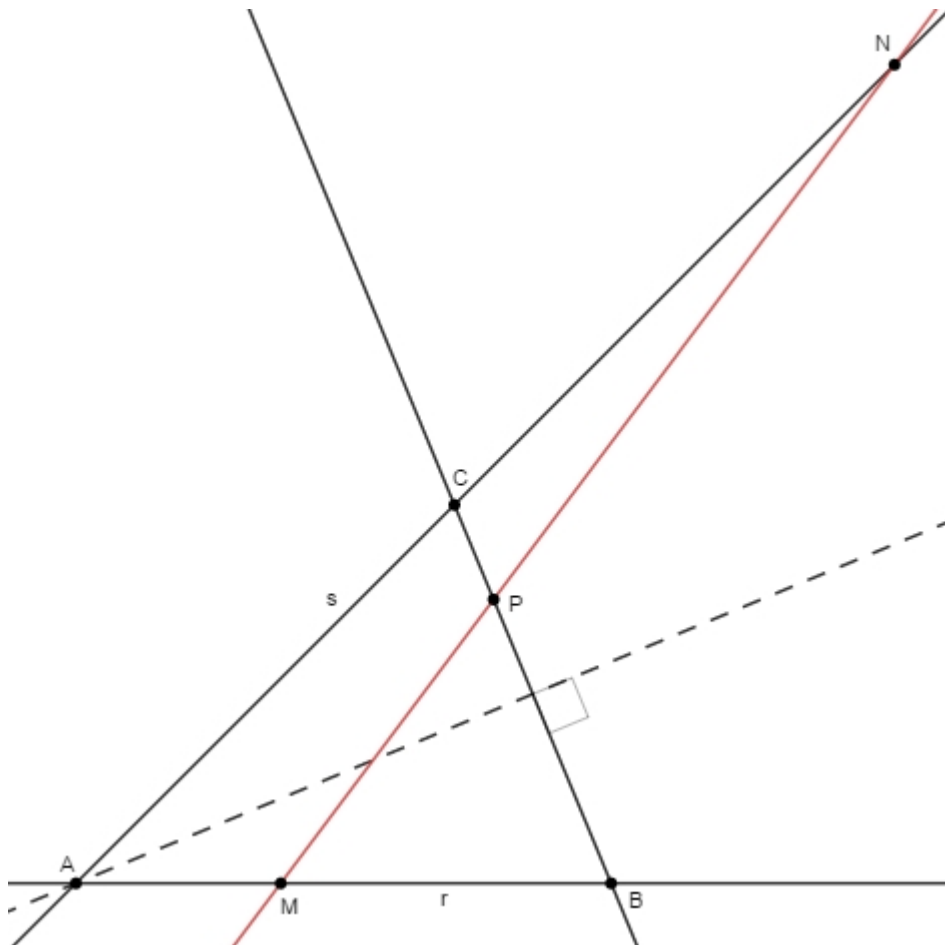
$$(AMN)_{\text{mínima}} = f\left(\frac{2p-1}{2(p-1)}\right)(ABC) = 4p(1-p)\left(\frac{b^2 \sin \theta}{2}\right)_{b=\frac{a}{2 \sin(\frac{\theta}{2})}} = 4p(1-p)\left[\frac{a^2 \sin \theta}{4(1-\cos \theta)}\right] = \frac{a^2 \sin \theta p(1-p)}{1-\cos \theta} = \frac{PC \cdot PB \sin \theta}{1-\cos \theta}$$

Finalmente, suponiendo que $0 < p \leq \frac{1}{2}$ (si fuese $\frac{1}{2} \leq p < 1$ se razonaría de forma totalmente análoga), como:

$$\begin{cases} M = (1-2p : 2p : 0) \\ N = (2p-1 : 0 : 2(1-p)) \end{cases}$$

entonces:

$$AM = 2pb = 2p\left(\frac{a}{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) = \frac{pa}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{PC}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$



Miguel-Ángel Pérez García-Ortega