

Pr. Cabri 957

Enunciado

Dados un triángulo ABC con baricentro G, incentro I, ortocentro H, circuncentro O y punto simediano K y un punto P interior a él, probar que:

- 1) El lugar geométrico de los centros de las cónicas que circunscriben al cuadrilátero ABCP es una elipse que pasa por los puntos medios D, E y F de los segmentos BC, CA y AB, respectivamente, y por los vértices del triángulo ceviano D"E"F" del punto P con respecto al triángulo ABC, pero no pasa por los vértices de éste. Además, todas las cónicas que circunscriben al cuadrilátero ABCP son de tipo hiperbólico.
- 2) Esta elipse es una circunferencia únicamente cuando $P = H$.
- 3) Esta elipse no puede ser tangente exactamente a dos de los lados del triángulo ABC.
- 4) El centro M de esta elipse coincide con el punto P únicamente cuando $P = G$.
- 5) Esta elipse no pasa por ninguno de los puntos P, I y G y, además, si el triángulo ABC no es obtusángulo, tampoco pasa por el punto K y pasa por el punto O si y sólo si el triángulo ABC es rectángulo.
- 6) Las rectas polares de los puntos P y G respecto de esta elipse no contienen ningún punto interior al triángulo ABC.
- 7) Las rectas polares de los puntos A, B y C respecto de esta elipse no pasan ni por el punto P ni por el punto G.
- 8) Las rectas tangentes a esta elipse en los puntos medios D, E y F no pasan por ninguno de los puntos P, I y G y, además, si el triángulo ABC no es obtusángulo, tampoco pasan por el punto K.
- 9) El baricentro del triángulo UVW determinado por las rectas tangentes a esta elipse en los puntos D, E y F coincide con el punto G si y sólo si $P = G$.
- 10) El baricentro del triángulo XYZ determinado por las rectas polares a esta elipse en los puntos A, B y C coincide con el punto G si y sólo si $P = G$.

Propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega.

Solución

de César Beade Franco

Para los cálculos consideraré el triángulo $A(a,b)$, $B(0,0)$, $C(1,0)$ y el punto $P(p,q)$.

Como las transformaciones afines conservan el tipo de cónica así como el baricentro, tangencias, etc. y como desde un punto de vista afín, "todos los triángulos son iguales", a veces bastará con utilizar un triángulo concreto, por ejemplo $A(0,1)$.

Y doy por supuesto que son conocidos los distintos puntos relacionados con estos triángulos (baricentro, ortocentro....), así como la posibilidad de efectuar cualquier cálculo sobre la cónica (ecuación, invariantes, polares....).

- 1) Como señalé en la solución del Pr.954, este lugar geométrico se conoce como "cónica de los 9 puntos", que denotaré por K9P, pues, aparte de pasar por los 3 vértices del triángulo ceviano citado, pasa también por los 6 puntos medios de los segmen-

tos determinados por los 4 puntos A, B, C y P. Repito lo dicho allí.

Los vértices de triángulo ceviano son $D'' = AP \cap BC$, $E'' = BP \cap AC$ y $F'' = CP \cap AB$. Deducimos que K9P pasa por ellos con un razonamiento sutil pero simple. El par de rectas AP y BC es una cónica (degenerada del haz) así que su "centro" ha de pertenecer a K9P y éste no es otro que el punto D'' . Y el mismo argumento sirve para E'' y F'' .

Veamos que también pasa por los otros 6 puntos citados.

Sea F el punto medio de AB. Siempre hay una cónica con centro en F que pasa por B, C y P pero si pasa por B también ha de pasar por el simétrico de B respecto a F que es A. Por tanto F es el centro de una cónica que pasa por A, B, C, y P así que pertenece K9P. El mismo razonamiento sirve para los otros 5 puntos medios.

Si pasara por un vértice, por ejemplo A, pasaría por tres puntos alineados sobre los dos lados que convergen en A, lo que no es posible pues estas dos rectas no constituyen una cónica degenerada del haz al no pasar por P.

Los 4 puntos A, B, C, P pueden considerarse vértices de un cuadrilátero concavo (P es interior al triángulo ABC) inscrito en una cónica. Y estos cuadriláteros solo pueden inscribirse en hipérbolas.

Para determinar el tipo de cónica de K9P en este caso recurriré a su ecuación. Basta considerar $A(0,1)$, según lo comentado sobre transformaciones afines.

Dicha ecuación (1) es

$$-p q + (q + 2 p q - q^2) x + (-2 q + 2 q^2) x^2 + (p - p^2 + 2 p q) y - 4 p q x y + (-2 p + 2 p^2) y^2 = 0$$

cuyo invariante afín es $4 p q (1-p-q)$ que resulta ser >0 pues $p, q > 0$ y $p+q < 1$, al ser P interior al triángulo. Así K9P es en este caso una elipse.

2) Le imponemos a la ecuación de la cónica las condiciones para que sea una circunferencia, es decir $b=0$ y $a-c=0$ (2).

Resulta que $p=a$ y $q=\frac{a-a^2}{b}$. El punto resultante es $(a, \frac{a-a^2}{b})$, es decir el ortocentro de ABC. Y la circunferencia no es otra que la de los 9 puntos (pasa por los puntos medios de los lados).

Podemos añadir que el haz de cónicas está, en este caso, constituido por todas las hipérbolas equiláteras que pasan por los vértices del triángulo.

3 y 4) Si K9P es tangente un lado, digamos BC, significa que los dos puntos de la cónica sobre ese lado, D y D'' , coinciden y la ceviana es una mediana. Si fuera tangente a dos tendríamos dos medianas que convergen en $P=G$. Y además determinan una tercera mediana y su correspondiente punto de tangencia. K9P sería entonces la cónica tritangente al triángulo por los puntos medios de sus lados, es decir la in-elipse de Steiner cuyo centro es precisamente G. Y ésta es la única K9P tritangente para un triángulo dado.

5) No pasa por P pues éste es interior al triángulo ceviano, inscrito en la elipse.

El baricentro G es interior al triángulo medial de ABC (sigue siendo su baricentro). También lo es I, pues sino la distancia a un lado sería $> r$. Como el triángulo medial está inscrito a K9P, ésta no pasa por esos puntos

En cuanto a O si ABC es rectángulo será el punto medio de la hipotenusa perteneciente a K9P. Si es acutángulo es interior al triángulo medial. Si es obtusángulo, O es exterior, digamos al lado al lado BC. La mediatriz desde A corta a la elipse en D y en otro punto situado en la perpendicular BC por D, "hacia dentro" del triángulo. Y O está en el sentido contrario.

6) Una transformación afín conserva la polaridad así como la condición de ser o no interior a un triángulo. Nos ceñimos, pues al triángulo $A(0,1)$.

Comprobaremos que estas polares no cortan a los lados AB y BC de este triángulo (por simetría basta comprobarlo para uno, el BC, por ejemplo).

Estas polares (3) son

$$(q - 2pq - q^2)x + (p - p^2 - 2pq)y + p^2q + pq^2$$

$$\text{y } (-q + 2pq + q^2)x + (-p + p^2 + 2pq)y + p - p^2 + q - 2pq - q^2, \text{ respectivamente.}$$

Sus intersecciones con la recta BC son $(\frac{p(p+q)}{-1+2p+q}, 0)$ para la polar de P y

$(\frac{(-1+p+q)(p+q)}{q(-1+2p+q)}, 0)$ para la de G. En ningún caso están entre BC, dadas las restricciones,

$$0 < p, q, p+q < 1$$

7) Lo haremos por cálculo directo. Bastaría probarlo para un vértice, $B(0,0)$ y renombrarlos.

Para $P(p,q)$ usamos la ecuación general (ver nota (1)) y tras sustituir $P(p,q)$ en la ecuación de la polar obtenemos $\frac{1}{2}q(bp - aq)(bp + q - aq)$ que solo se anula cuando P está sobre algún lado, lo que no es factible.

Para G nos bastaría con el triángulo $A(0,1)$ pues la condición de baricentro permanece invariante. Aquí $G(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ y el cálculo anterior da $-\frac{1}{6}(-1+p+q)(p+q)$ que tampoco se anula.

8) I y G son interiores al triángulo medial, mientras que P lo es al ceviano, ambos inscritos en la elipse.

9) Las polares a K9P por D, E, F, son las tangentes por esos puntos (3). En este caso K9P la in-elipse de Steiner de XYZ pues es la transformada afín de la in-elipse de Steiner de ABC, única K9P tritangente para un triángulo dado.

Si suponemos que ABC y XYZ tienen los mismos baricentros entonces $A+B+C = X+Y+Z$. Además el centro de esta elipse en cuanto in-elipse de Steiner de XYZ puede expresarse (4) como $\frac{X+Y+Z+G}{4}$ y como K9P de ABC respecto a P, como, $\frac{A+B+C+P}{4}$. De estas igualdades concluimos que $G=P$. Y los triángulos ABC y XYZ coinciden.

10) Calculamos estas polares y sus intersecciones para un triángulo con $A(0,1)$. Obtenemos

$$PI(B) \cap PI(C) = U = \left(\frac{p(-1+p+2q)^2}{4(1+p)q(-1+p+q)}, -\frac{1+p-2p^2+q-3pq-2q^2}{4(1+p)(-1+p+q)} \right),$$

$$PI(C) \cap PI(A) = V = \frac{p^2+p(-1+q)+q(-3+2q)}{4q(-2+p+q)}, \frac{2p^2+p(-3+q)+(-1+q)q}{4p(-2+p+q)} \text{ y}$$

$$PI(A) \cap PI(B) = W = \left(\frac{p(-1+p+2q)^2}{4(1+p)q(-1+p+q)}, -\frac{1+p-2p^2+q-3pq-2q^2}{4(1+p)(-1+p+q)} \right).$$

Igualando su baricentro (5) al de ABC, $G = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ y resolviendo el sistema resulta $p = \frac{1}{3}$ y $q = \frac{1}{3}$. Es decir, $P=G$. El triángulo UVW coincide en este caso con el medial.

Notas

(1) La ecuación para $A(a,b)$ y $P(p,q)$ es

$$-b^2pq + abq^2 + bq(bp - q - 2aq)x +$$

$$bq(-2b + 2q)x^2 + (b^2p - b^2p^2 - 2abq + 2bpq - aq^2 + a^2q^2)y +$$

$$b(4a - 4p)qx + y + (-2bp + 2bp^2 + 2aq - 2a^2q)y^2 = 0$$

(2) Recordemos la ecuación general de una cónica: $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$

(3) La polar de un punto $P(a,b)$ viene dada por $(a,b,1)^t A(x,y,1)^t$, o $(a,b,c) A(x,y,1)^t$ usando coordenadas homogéneas donde $c = 1$ para puntos propios y $c = 0$

para puntos del ∞ . A es la matriz asociada a la cónica.

(4) En este apartado se utiliza el siguiente resultado (supongo que teórico):

El centro de la K9P para un triángulo ABC y respecto a un punto P, puede expresarse en función de las coordenadas de todos ellos como $\frac{A+B+C+P}{4}$.

(5) Sus coordenadas son

$$\left(\frac{1}{12} \left(\frac{p(-1+p+2q)^2}{(1+p)q(-1+p+q)} - \frac{1+p-2p^2+q-3pq-2q^2}{(1+q)(-1+p+q)} + \frac{p^2+p(-1+q)+q(-3+2q)}{q(-2+p+q)} \right), \right. \\ \left. \frac{1}{12} \left(\frac{q(-1+2p+q)^2}{p(1+q)(-1+p+q)} + \frac{2p^2+p(-3+q)+(-1+q)q}{p(-2+p+q)} - \frac{1+p-2p^2+q-3pq-2q^2}{(1+p)(-1+p+q)} \right) \right)$$