

TRIÁNGULOS CABRI

Problema 957. (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dados un triángulo ABC con baricentro G , incentro I , ortocentro H , circuncentro O y punto simediano K y un punto P interior a él, probar que:

- ① El lugar geométrico de los centros de las cónicas que circunscriben al cuadrilátero $ABCP$ es una elipse que pasa por los puntos medios D , E y F de los segmentos BC , CA y AB , respectivamente, y por los vértices del triángulo ceviano $D''E''F''$ del punto P con respecto al triángulo ABC , pero no pasa por los vértices de éste. Además, todas las cónicas que circunscriben al cuadrilátero $ABCP$ son de tipo hiperbólico.
- ② Esta elipse es una circunferencia únicamente cuando $P = H$. Además, si el triángulo ABC es rectángulo, esta elipse no puede ser una circunferencia.
- ③ Esta elipse no puede ser tangente exactamente a dos de los lados del triángulo ABC .
- ④ El centro M de esta elipse coincide con el punto P únicamente cuando $P = G$.
- ⑤ Esta elipse no pasa por ninguno de los puntos P , I y G y, además, si el triángulo ABC no es obtusángulo, tampoco pasa por el punto K y pasa por el punto O si y sólo si el triángulo ABC es rectángulo.
- ⑥ Las rectas polares de los puntos P y G respecto de esta elipse no contienen ningún punto interior al triángulo ABC .
- ⑦ Las rectas polares de los puntos A , B y C respecto de esta elipse no pasan ni por el punto P ni por el punto G .
- ⑧ Las rectas tangentes a esta elipse en los puntos medios D , E y F no pasan por ninguno de los puntos P , I y G y, además, si el triángulo ABC no es obtusángulo, tampoco pasan por el punto K .
- ⑨ El baricentro del triángulo UVW determinado por las rectas tangentes a esta elipse en los puntos D , E y F coincide con el punto G si y sólo si $P = G$.
- ⑩ El baricentro del triángulo XYZ determinado por las rectas polares a esta elipse en los puntos A , B y C coincide con el punto G si y sólo si $P = G$.
- ❶ El baricentro del triángulo $D'E'F'$ cuyos vértices son los segundos puntos de intersección entre esta elipse y las tres medianas del triángulo ABC coincide con el punto G si y sólo si $P = G$.
- ❷ El baricentro del triángulo $D''E''F''$ cuyos vértices son los segundos puntos de intersección entre esta elipse y los tres lados del triángulo ABC coincide con el punto G si y sólo si $P = G$.
- ❸ Los puntos P , G y M están alineados y, además, se verifica que $MP = 3MG$.
- ❹ Las rectas polares de los puntos A , B y F son concurrentes (en el punto Z), las rectas polares de los puntos A , C y E son concurrentes (en el punto Y) y las rectas polares de los puntos B , C y D son concurrentes (en el punto X).
- ❺ Si el punto P tiene coordenadas (m, n) ($0 < m < 1, 0 < n < 1, m + n < 1$) respecto de la referencia afín $\{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$, entonces:

$$\frac{(UVW)}{(ABC)} = \frac{(1-m)(1-n)(m+n)}{8mn(1-m-n)}$$

TRIÁNGULOS CABRI

- ⑥ Si el punto P tiene coordenadas (m, n) ($0 < m < 1, 0 < n < 1, m + n < 1$) respecto de la referencia afín $\{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$, entonces:

$$\frac{(XYZ)}{(ABC)} = \frac{(1-m)^2(1-n)^2(m+n)^2}{4mn(1+m)(1+n)(1-m-n)(2-m-n)}$$

- ⑦ Si el punto P tiene coordenadas (m, n) ($0 < m < 1, 0 < n < 1, m + n < 1$) respecto de la referencia afín $\{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ y $D'E'F'$ es el triángulo cuyos vértices son los segundos puntos de intersección entre esta elipse y las tres medianas del triángulo ABC , entonces:

$$\frac{(D'E'F')}{(ABC)} = \frac{2[(1-m-n)(m+n)+mn]^3}{[(1-m-n)(4m+n)+mn][(1-m-n)(m+4n)+mn][(1-m-n)(m+n)+4mn]}$$

- ⑧ Si el punto P tiene coordenadas (m, n) ($0 < m < 1, 0 < n < 1, m + n < 1$) respecto de la referencia afín $\{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ y $D''E''F''$ es el triángulo cuyos vértices son los segundos puntos de intersección entre esta elipse y los tres lados del triángulo ABC , entonces:

$$\frac{(D''E''F'')}{(ABC)} = \frac{2mn(1-m-n)}{(1-m)(1-n)(m+n)}$$

- ⑨ El hexágono $H_1H_2H_3H_4H_5H_6$ determinado por los puntos de intersección entre los lados del triángulo y las rectas paralelas a ellos pasando por el punto M (H_2 y H_3 en AB , H_4 y H_5 en BC y H_6 y H_1 en CA) está inscrito en una elipse, cuyo centro T coincide con el punto G si y sólo si $P = G$.

$$\textcircled{10} \quad \frac{(GH_2H_3)}{(ABC)} + \frac{(GH_4H_5)}{(ABC)} + \frac{(GH_6H_1)}{(ABC)} = \frac{1}{3}$$

Solución:

- ① Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC , como la ecuación de una cónica general que pase por sus vértices es:

$$uxy + vxz + wyz = 0 \quad (u, v, w \in \mathbb{R})$$

imponiendo que pase por el punto $P = (1 : p : q)$ ($p > 0, q > 0$), obtenemos que:

$$pu + qv + pqw = 0 \Rightarrow u = -\frac{q(v + pw)}{p}$$

por lo que la ecuación general de una cónica que pase por los puntos A, B, C y P es:

$$-q(v + pw)xy + pvxz + pwyz = 0 \quad (v, w \in \mathbb{R})$$

TRIÁNGULOS CABRI

estando las coordenadas de su centro (conjugado de la recta del infinito) determinadas por la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -q(v+pw) & pv \\ -q(v+pw) & 0 & pw \\ pv & pw & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -q(v+pw) & pv \\ -q(v+pw) & 0 & pw \\ pv & pw & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

es decir, su centro es:

$$Q = (-pw[(q-p)v + p(q+1)w] : -pv[(p+q)v + p(q-1)w] : -q(v+pw)[(p+q)v + p(q+1)w])$$

por lo que, eliminando los parámetros v , w y θ del siguiente sistema de ecuaciones paramétricas

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -p\theta w[(q-p)v + p(q+1)w] \\ y = -p\theta v[(p+q)v + p(q-1)w] \\ z = -q\theta(v+pw)[(p+q)v + p(q+1)w] \end{array} \right.$$

resulta que el lugar geométrico de los centros del haz de cónicas que pasan por estos cuatro puntos es la cónica de ecuación:

$$pqx^2 + qy^2 + pz^2 - q(p+1)xy - p(q+1)xz - (p+q)yz = 0$$

que pasa por los puntos medios D , E y F de los segmentos BC , CA y AB , respectivamente, y por los vértices del triángulo ceviano $D''E''F''$ del punto P con respecto al triángulo ABC , cuyas coordenadas:

$$\left\{ \begin{array}{l} D = (0 : 1 : 1) \\ E = (1 : 0 : 1) \\ F = (1 : 1 : 0) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} D'' = (0 : p : q) \\ E'' = (1 : 0 : q) \\ F'' = (1 : p : 0) \end{array} \right.$$

verifican la ecuación de dicha cónica. Además, esta cónica es una elipse que no pasa por los vértices del triángulo ABC (porque los coeficientes de x^2 , y^2 y z^2 son no nulos), ya que es no degenerada, pues:

$$\left| \begin{array}{ccc} 2pq & -q(p+1) & -p(q+1) \\ -q(p+1) & 2q & -(p+q) \\ -p(q+1) & -(p+q) & 2p \end{array} \right| = -4pq(p+1)(q+1)(p+q) < 0$$

y no tiene ningún punto en la recta del infinito, ya que el discriminante del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = pqx^2 + qy^2 + pz^2 - q(p+1)xy - p(q+1)xz - (p+q)yz \\ 0 = x + y + z \end{array} \right.$$

es:

$$\Delta_1 = -pq(p+q+1) < 0$$

TRIÁNGULOS CABRI

Además, como, para cada $(v, w) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ el discriminante del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = -q(v + pw)xy + pvxz + pwyx \\ 0 = x + y + z \end{cases}$$

es:

$$\Delta_2 = p^2 q^2 w^2 + 2p^2 q(vw + w^2) + 2pq^2 vw + p^2(v - w)^2 + q^2 v^2 + 2pq(v^2 + vw)$$

entonces, vamos a distinguir cuatro casos:

▲ Si $v = 0$, la ecuación de la cónica resultante es:

$$y(qx - z) = 0$$

que corresponde al par de rectas formado por las rectas secantes AC y BP y, por tanto, es una cónica de tipo hiperbólico.

✦ Si $w = 0$, la ecuación de la cónica resultante es:

$$x(qy - pz) = 0$$

que corresponde al par de rectas formado por las rectas secantes BC y AP y, por tanto, es una cónica de tipo hiperbólico.

★ Si $v + pw = 0$, la ecuación de la cónica resultante es:

$$z(px - y) = 0$$

que corresponde al par de rectas formado por las rectas secantes AB y CP y, por tanto, es una cónica de tipo hiperbólico.

⊕ Si $vw(v + pw) \neq 0$, tomando $h = \frac{v}{w}$, resulta que:

$$\Delta_2(h) = (p + q)^2 h^2 + 2p(q^2 + pq + q - p)h + p^2(q + 1)^2 > 0$$

ya que $\Delta_2(0) = p^2(q + 1)^2 > 0$ y el discriminante de esta función cuadrática es:

$$\Delta_3 = -pq(p + q + 1) < 0$$

por lo que la función $\Delta_2(h)$ tiene signo constante. Por tanto, esta cónica es una hipérbola, ya que tiene dos puntos en la recta del infinito y es no degenerada, pues:

$$\begin{vmatrix} 0 & -q(v + pw) & pv \\ -q(v + pw) & 0 & pw \\ pv & pw & 0 \end{vmatrix} = -2p^2 qvw(v + pw) \neq 0$$

② Esta elipse será una circunferencia únicamente cuando sea la circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC (ya que pasa por los puntos medios de sus lados), cuya ecuación es:

$$-S_A x^2 - S_B y^2 - S_C z^2 + c^2 xy + b^2 xz + a^2 yz = 0$$

TRIÁNGULOS CABRI

por lo que los segundos puntos de intersección entre ella y los lados del triángulo ABC serán:

$$\begin{cases} D'' = (0 : S_C : S_B) \\ E'' = (S_C : 0 : S_A) \\ F'' = (S_B : S_A : 0) \end{cases}$$

en cuyo caso, $D''E''F''$ sería el triángulo ceviano del punto $H = (S_BS_C : S_AS_C : S_AS_B)$ y, por tanto, $P = H$. Además, si el triángulo ABC fuese rectángulo, entonces, su ortocentro H sería el vértice correspondiente a su ángulo recto, por lo que no sería un punto interior del triángulo ABC , lo cual significaría que $P \neq H$ y, por tanto, esta elipse no podría ser una circunferencia.

- ③ Esta elipse será tangente a uno de los lados del triángulo ABC cuando sus dos puntos de corte con dicho lado coincidan, siendo:

$$\begin{cases} \text{tangente a } AB \text{ si } F'' = F = (1 : 1 : 0) \\ \text{tangente a } BC \text{ si } E'' = E = (1 : 0 : 1) \\ \text{tangente a } CA \text{ si } D'' = D = (0 : 1 : 1) \end{cases}$$

por lo que, como $D''E''F''$ es el triángulo ceviano del punto P , si esta elipse fuese tangente a dos de los lados del triángulo ABC , entonces, el punto P habría de estar en las medianas correspondientes a los vértices opuestos de éstos y, como las tres medianas son concurrentes (en el punto G), tendríamos el punto P estaría en la mediana restante y, por tanto, la elipse sería tangente también al lado restante.

- ④ Como las coordenadas del centro de esta elipse (conjugado de la recta del infinito respecto de ella) vienen dadas por la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2pq & -q(p+1) & -p(q+1) \\ -q(p+1) & 2q & -(p+q) \\ -p(q+1) & -(p+q) & 2p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2pq & -q(p+1) & -p(q+1) \\ -q(p+1) & 2q & -(p+q) \\ -p(q+1) & -(p+q) & 2p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow M = (2+p+q : 1+2p+q : 1+p+2q)$$

entonces, este punto coincidirá con el punto $P = (1 : p : q)$ si y sólo si:

$$(0, 0, 0) = (2+p+q, 1+2p+q, 1+p+2q) \times (1, p, q) = (p+q+1)(q-p, 1-q, p-1)$$

es decir, si y sólo si $p = q = 1$, o lo que es lo mismo, si y sólo si $P = G$.

- ⑤ Imponiendo que esta elipse pasase por alguno de los puntos P , I o G , tendríamos que:

$$\begin{cases} P = (1 : p : q) \rightarrow & 0 < pq(1+p+q) = 0 \\ I = (a : b : c) \rightarrow & 0 < pc(a+b-c) + qb(a-b+c) + pqa(-a+b+c) = 0 \\ G = (1 : 1 : 1) \rightarrow & 0 < p+q+pq = 0 \end{cases}$$

TRIÁNGULOS CABRI

lo cual es imposible y, por tanto, no pasa por ninguno de ellos. Además:

☒ Si el triángulo ABC no es obtusángulo, resulta que:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \leq b^2 + c^2 \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \leq a^2 + c^2 \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \leq a^2 + b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a^2 + b^2 + c^2 \geq 0 \\ a^2 - b^2 + c^2 \geq 0 \\ a^2 + b^2 - c^2 \geq 0 \end{cases}$$

dándose la igualdad como mucho en una de estas expresiones, por lo que, si esta elipse pasase por el punto K tendríamos que:

$$0 < pc^2(a^2 + b^2 - c^2) + qb^2(a^2 - b^2 + c^2) + pqa^2(-a^2 + b^2 + c^2) = 0$$

lo cual es imposible.

☒ Esta elipse pasa por el punto O si y sólo si:

$$\left(\frac{c^2p + b^2q + a^2pq}{>0} \right) (-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2) = 0$$

es decir, si y sólo si:

$$\begin{cases} -a^2 + b^2 + c^2 = 0 \\ \quad \quad \quad \text{ó} \\ a^2 - b^2 + c^2 = 0 \\ \quad \quad \quad \text{ó} \\ a^2 + b^2 - c^2 = 0 \end{cases}$$

o lo que es lo mismo, si y sólo si el triángulo ABC es rectángulo.

⑥ Como las ecuaciones de las rectas polares de los puntos P y G con respecto a esta elipse son:

$$\begin{cases} p_P \equiv 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2pq & -q(p+1) & -p(q+1) \\ -q(p+1) & 2q & -(p+q) \\ -p(q+1) & -(p+q) & 2p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ q \end{pmatrix} = pq(p+q)x + q(1+q)y + p(1+p)z \\ p_G \equiv 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2pq & -q(p+1) & -p(q+1) \\ -q(p+1) & 2q & -(p+q) \\ -p(q+1) & -(p+q) & 2p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (p+q)x + p(1+q)y + (1+p)qz \end{cases}$$

entonces, es imposible que pasen por ningún punto interior al triángulo ABC (cuyas tres coordenadas serían estrictamente positivas).

TRIÁNGULOS CABRI

⑦ Como las ecuaciones de las rectas polares de los puntos A , B y C con respecto a esta elipse son:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_A \equiv 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2pq & -q(p+1) & -p(q+1) \\ -q(p+1) & 2q & -(p+q) \\ -p(q+1) & -(p+q) & 2p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -2pqx + q(1+p)y + p(1+q)z \\ p_B \equiv 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2pq & -q(p+1) & -p(q+1) \\ -q(p+1) & 2q & -(p+q) \\ -p(q+1) & -(p+q) & 2p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = q(1+p)x - 2qy + (p+q)z \\ p_C \equiv 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2pq & -q(p+1) & -p(q+1) \\ -q(p+1) & 2q & -(p+q) \\ -p(q+1) & -(p+q) & 2p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = p(1+q)x + (p+q)y - 2pz \end{array} \right.$$

resulta que:

☺ Si estas rectas pasasen por el punto P tendríamos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < pq(p+q) = 0 \\ 0 < q(1+q) = 0 \\ 0 < p(1+p) = 0 \end{array} \right.$$

lo cual es imposible.

☹ Si estas rectas pasasen por el punto G tendríamos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < p+q = 0 \\ 0 < p(1+q) = 0 \\ 0 < q(1+p) = 0 \end{array} \right.$$

lo cual es imposible.

⑧ Como las ecuaciones de las rectas tangentes a esta elipse en los puntos D , E y F son:

$$\left\{ \begin{array}{l} t_D \equiv 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2pq & -q(p+1) & -p(q+1) \\ -q(p+1) & 2q & -(p+q) \\ -p(q+1) & -(p+q) & 2p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (p+q+2pq)x + (p-q)y + (q-p)z \\ t_E \equiv 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2pq & -q(p+1) & -p(q+1) \\ -q(p+1) & 2q & -(p+q) \\ -p(q+1) & -(p+q) & 2p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = p(1-q)x + (p+2q+pq)y - p(1-q)qz \\ t_F \equiv 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2pq & -q(p+1) & -p(q+1) \\ -q(p+1) & 2q & -(p+q) \\ -p(q+1) & -(p+q) & 2p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = q(1-p)x - q(1-p)y + (2p+q+pq)z \end{array} \right.$$

TRIÁNGULOS CABRI

resulta que:

☺ Si estas rectas pasasen por el punto P tendríamos que:

$$\begin{cases} 0 < p(1+p) + q(1+q) = 0 \\ 0 < p(1+p+pq+q^2) = 0 \\ 0 < q(1+q+pq+p^2) = 0 \end{cases}$$

lo cual es imposible.

☺ Si estas rectas pasasen por el punto G tendríamos que:

$$\begin{cases} 0 < p + q + 2pq = 0 \\ 0 < p + 2q + pq = 0 \\ 0 < 2p + q + pq = 0 \end{cases}$$

lo cual es imposible.

☹ Si estas rectas pasasen por el punto I tendríamos que:

$$\begin{cases} 0 < p(a+b-c) + q(a-b+c) + 2pqa = 0 \\ 0 < p(a+b-c) + 2qb + pq(-a+b+c) = 0 \\ 0 < 2pc + q(a-b+c) + pq(-a+b+c) = 0 \end{cases}$$

lo cual es imposible.

Además, si el triángulo ABC no es obtusángulo, resulta que:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \leq b^2 + c^2 \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \leq a^2 + c^2 \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \leq a^2 + b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a^2 + b^2 + c^2 \geq 0 \\ a^2 - b^2 + c^2 \geq 0 \\ a^2 + b^2 - c^2 \geq 0 \end{cases}$$

dándose la igualdad como mucho en una de estas expresiones, por lo que, si estas rectas pasasen por el punto K tendríamos que:

$$\begin{cases} 0 < p(a^2 + b^2 - c^2) + q(a^2 - b^2 + c^2) + 2pqa^2 = 0 \\ 0 < p(a^2 + b^2 - c^2) + 2qb^2 + pq(-a^2 + b^2 + c^2) = 0 \\ 0 < 2pc^2 + q(a^2 - b^2 + c^2) + pq(-a^2 + b^2 + c^2) = 0 \end{cases}$$

lo cual es imposible.

⑨ Como:

$$\begin{cases} U = t_E \cap t_F = (p + q + 2pq : p(1-q) : q(1-p)) \\ V = t_D \cap t_F = (q - p : p + 2q + pq : q(1-p)) \\ W = t_D \cap t_E = (p - q : p(1-q) : 2p + q + pq) \end{cases}$$

TRIÁNGULOS CABRI

entonces, el baricentro del triángulo UVW es:

$$G_{UVW} = (p^2 + (q-1)q - p(1+4q) : p(1-p-4q-pq+q^2) : q(1+p^2-q+p(4+q)))$$

por lo que este punto coincidirá con el punto $G = (1 : 1 : 1)$ si y sólo si:

$$(0, 0, 0) = (p^2 + (q-1)q - p(1+4q), p(1-p-4q-pq+q^2), q(1+p^2-q+p(4+q))) \times (1, 1, 1)$$

$$(0, 0, 0) = ((p-q)(-1+p+q+2pq), (1-q)(-p+p^2-2q-pq), (1-p)(2p+q+pq-q^2))$$

es decir, si y sólo si $p = q = 1$ (única solución con $p > 0$ y $q > 0$), o lo que es lo mismo, si y sólo si $P = G$.

⑩ Como:

$$\begin{cases} X = p_B \cap p_C = (-(p-q)^2 : p(p+3q+3pq+q^2) : q(3p+p^2+q+3pq)) \\ Y = p_A \cap p_C = (p+3q+3pq+q^2 : -p(1-q)^2 : q(1+3p+3q+pq)) \\ Z = p_A \cap p_B = (3p+p^2+q+3pq : p(1+3p+3q+pq) : -q(1-p)^2) \end{cases}$$

entonces, el baricentro del triángulo XYZ es:

$$G_{xyz} = (p^3 - p^2 + 14pq + 40p^2q + 25p^3q + 5p^2q + q^3 + 40pq^2 + 64p^2q^2 + 19p^3q^2 + 25pq^3 + 19p^2q^2 - q^4 + 5pq^4 : p(-p + p^3 + 5q + 25pq + 40p^2q + 14p^3q + 19q^2 + 64pq^2 + 40p^2q^2 + p^3q^2 + 19q^3 + 25pq^3 + 5q^4 - pq^4) : q(5p + 19p^2 + 19p^3 + 5p^4 - q + 25pq + 64p^2q + 25p^3q - p^4q + 40pq^2 + 40p^2q^2 + q^3 + 14pq^3 + p^3q^3))$$

por lo que este punto coincidirá con el punto $G = (1 : 1 : 1)$ si y sólo si:

$$(0, 0, 0) = (p^3 - p^2 + 14pq + 40p^2q + 25p^3q + 5p^2q + q^3 + 40pq^2 + 64p^2q^2 + 19p^3q^2 + 25pq^3 + 19p^2q^2 - q^4 + 5pq^4, p(-p + p^3 + 5q + 25pq + 40p^2q + 14p^3q + 19q^2 + 64pq^2 + 40p^2q^2 + p^3q^2 + 19q^3 + 25pq^3 + 5q^4 - pq^4), q(5p + 19p^2 + 19p^3 + 5p^4 - q + 25pq + 64p^2q + 25p^3q - p^4q + 40pq^2 + 40p^2q^2 + q^3 + 14pq^3 + p^3q^3)) \times (1, 1, 1)$$

$$(0, 0, 0) = ((q-p)(-p + p^3 - q + 6pq + 22p^2q + 9p^3q + 22pq^2 + 24p^3q^2 + 2p^2q^2 + q^3 + 9pq^3 + 2p^2q^3), (q-1)(-p^3 + p^4 - 9pq - 22p^2q - 6p^3q + p^4q - 2q^3 - 24pq^2 - 22p^2q^2 - 2q^3 - 9pq^3 - p^3q^3), (p-1)(2p^3 + 2p^4 + 9pq + 24p^2q + 9p^3q + q^3 + 22pq^2 + 22p^2q^2 + p^3q^2 + 6pq^3 - q^4 - pq^4))$$

es decir, si y sólo si $p = q = 1$ (única solución con $p > 0$ y $q > 0$), o lo que es lo mismo, si y sólo si $P = G$.

❶ Como las ecuaciones de las tres medianas del triángulo ABC son:

$$\begin{cases} m_A = 0 = y - z \\ m_B = 0 = x - z \\ m_C = 0 = x - y \end{cases}$$

resolviendo los correspondientes sistemas de ecuaciones, obtenemos que:

$$\begin{cases} D' = (p + q + 2pq : pq : pq) \\ E' = (q : p + 2q + pq : q) \\ F' = (p : p : 2p + q + pq) \end{cases}$$

por lo que el baricentro del triángulo $D'E'F'$ es:

$$G_{d'e'f'} = (5p^3 + 30p^2q + 18p^3q + 30pq^2 + 78p^2q^2 + 15p^3q^2 + 5q^3 + 18pq^3 + 15p^2q^2 - 2p^3q^2 : 5p^3 + 18p^2q + 30p^3q + 15pq^2 + 78p^2q^2 + 30p^3q^2 + 2q^3 + 15pq^3 + 18p^2q^2 + 5p^3q^2 : 2p^3 + 15p^2q + 15p^3q + 18pq^2 + 78p^2q^2 + 18p^3q^2 + 5q^3 + 30pq^3 + 30p^2q^2 + 5p^3q^2)$$

TRIÁNGULOS CABRI

y, por tanto, este punto coincidirá con el punto $G = (1 : 1 : 1)$ si y sólo si:

$$(0, 0, 0) = (5p^3 + 30p^2q + 18p^2q + 30pq^2 + 78p^2q^2 + 15p^2q^2 + 5q^3 + 18pq^3 + 15p^2q^2 + 2p^2q^2 + 5p^3 + 18p^2q + 30p^2q + 15pq^2 + 78p^2q^2 + 30p^2q^2 + 2q^3 + 15pq^3 + 18p^2q^2 + 5p^2q^2 + 2p^3 + 15p^2q + 15p^2q + 18pq^2 + 78p^2q^2 + 18p^2q^2 + 5q^3 + 30pq^3 + 30p^2q^2 + 5p^2q^2) \times (1, 1, 1)$$

$$(0, 0, 0) = \left(3(q-p) \frac{(p+q+pq)(p+q+4pq)}{>0}, 3(1-q) \frac{(p+q+pq)(p+4q+pq)}{>0}, 3(p-1) \frac{q(p+q+pq)(4p-q+pq)}{>0} \right)$$

es decir, si y sólo si $p = q = 1$, o lo que es lo mismo, si y sólo si $P = G$.

❷ Como:

$$\begin{cases} D'' = (0 : p : q) \\ E'' = (1 : 0 : q) \\ F'' = (1 : p : 0) \end{cases}$$

entonces, el baricentro del triángulo $D''E''F''$ es:

$$G_{D''E''F''} = ((p+q)(2+p+q) : p(1+q)(1+2p+q) : q(1+p)(1+p+2q))$$

por lo que este punto coincidirá con el punto $G = (1 : 1 : 1)$ si y sólo si:

$$(0, 0, 0) = ((p+q)(2+p+q), p(1+q)(1+2p+q), q(1+p)(1+p+2q)) \times (1, 1, 1)$$

$$(0, 0, 0) = \left((q-p) \left(\frac{1+2p+2q+pq}{>0} \right), (1-q) \left(\frac{2p+p^2+q+2pq}{>0} \right), (p-1) \left(\frac{p+2q+2pq+q^2}{>0} \right) \right)$$

es decir, si y sólo si $p = q = 1$, o lo que es lo mismo, si y sólo si $P = G$.

❸ Como:

$$\begin{cases} P = (1 : p : q) \\ G = (1 : 1 : 1) \\ M = (2+p+q : 1+2p+q : 1+p+2q) \end{cases}$$

y:

$$\begin{vmatrix} 1 & p & q \\ 1 & 1 & 1 \\ 2+p+q & 1+2p+q & 1+p+2q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & p-1 & q-1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2+p+q & p-1 & q-1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} p-1 & q-1 \\ p-1 & q-1 \end{vmatrix} = 0$$

entonces, estos tres puntos están alineados. Además, como el punto medio del segmento PG es:

$$N = (4+p+q : 1+4p+q : 1+p+4q)$$

y el punto medio del segmento NG es:

$$M = (2+p+q : 1+2p+q : 1+p+2q)$$

resulta que:

$$MP = 3MG$$

TRIÁNGULOS CABRI

④ Como:

$$\begin{cases} p_A \equiv 0 = -2pqx + q(1+p)y + p(1+q)z \\ p_B \equiv 0 = q(1+p)x - 2qy + (p+q)z \\ p_C \equiv 0 = p(1+q)x + (p+q)y - 2pz \end{cases}$$

y:

$$\begin{cases} t_D \equiv 0 = (p+q+2pq)x + (p-q)y + (q-p)z \\ t_E \equiv 0 = p(1-q)x + (p+2q+pq)y - p(1-q)qz \\ t_F \equiv 0 = q(1-p)x - q(1-p)y + (2p+q+pq)z \end{cases}$$

entonces:

☺ Las rectas polares de los puntos A , B y F son concurrentes, pues:

$$\begin{vmatrix} -2pq & q(1+p) & p(1+q) \\ q(1+p) & -2q & p+q \\ q(1-p) & -q(1-p) & 2p+q+pq \end{vmatrix} = q^2 \begin{vmatrix} -2p & 1+p & p(1+q) \\ 1+p & -2 & p+q \\ 1-p & p-1 & 2p+q+pq \end{vmatrix} \Big|_{F_3=F_1+F_2} 0$$

☺ Las rectas polares de los puntos A , C y E son concurrentes, pues:

$$\begin{vmatrix} -2pq & q(1+p) & p(1+q) \\ p(1+q) & p+q & -2p \\ p(1-p) & p+2q+pq & -p(1-q) \end{vmatrix} = p^2 \begin{vmatrix} -2q & q(1+p) & 1+q \\ 1+q & p+q & -2 \\ 1-p & p+2q+pq & q-1 \end{vmatrix} \Big|_{F_3=F_1+F_2} 0$$

⊗ Las rectas polares de los puntos B , C y D son concurrentes, pues:

$$\begin{vmatrix} q(1+p) & -2q & p+q \\ p(1+q) & p+q & -2p \\ p+q+2pq & p-q & q-p \end{vmatrix} \Big|_{F_3=F_1+F_2} 0$$

⑤ Si el punto P tiene coordenadas (m, n) ($0 < m < 1, 0 < n < 1, m+n < 1$) respecto de la referencia afín $\{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$, entonces:

$$\left(\frac{1}{p+q+1} : \frac{p}{p+q+1} : \frac{q}{p+q+1} \right) = (1-m-n : m : n) \Rightarrow \begin{cases} p = \frac{m}{1-m-n} \\ q = \frac{n}{1-m-n} \end{cases}$$

TRIÁNGULOS CABRI

por lo que:

$$\begin{aligned}\frac{(UVW)}{(ABC)} &= \frac{\begin{vmatrix} p+q+2pq & p(1-q) & q(1-p) \\ q-p & p+2q+pq & q(1-p) \\ p-q & p(1-q) & 2p+q+pq \end{vmatrix}}{32pq(p+q)} \\ &= \frac{(1+p)(1+q)(p+q)}{8pq} \\ &= \frac{(1-m)(1-n)(m+n)}{8mn(1-m-n)}\end{aligned}$$

- ⑥ Si el punto P tiene coordenadas (m, n) ($0 < m < 1, 0 < n < 1, m+n < 1$) respecto de la referencia afín $\{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$, entonces:

$$\left(\frac{1}{p+q+1} : \frac{p}{p+q+1} : \frac{q}{p+q+1} \right) = (1-m-n : m : n) \Rightarrow \begin{cases} p = \frac{m}{1-m-n} \\ q = \frac{n}{1-m-n} \end{cases}$$

por lo que:

$$\begin{aligned}\frac{(XYZ)}{(ABC)} &= \frac{\begin{vmatrix} -(p-q)^2 & p(p+3q+3pq+q^2) & q(3p+p^2+q+3pq) \\ p+3q+3pq+q^2 & -p(1-q)^2 & q(1+3p+3q+pq) \\ 3p+p^2+q+3pq & p(1+3p+3q+pq) & -q(1-p)^2 \end{vmatrix}}{64p^2q^2(p+q+2)(2p+q+1)(p+2q+1)} \\ &= \frac{(1+p)^2(1+q)^2(p+q)^2}{4pq(p+q+2)(2p+q+1)(p+2q+1)} \\ &= \frac{(1-m)^2(1-n)^2(m+n)^2}{4mn(1+m)(1+n)(1-m-n)(2-m-n)}\end{aligned}$$

- ⑦ Si el punto P tiene coordenadas (m, n) ($0 < m < 1, 0 < n < 1, m+n < 1$) respecto de la referencia afín $\{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$, entonces:

$$\left(\frac{1}{p+q+1} : \frac{p}{p+q+1} : \frac{q}{p+q+1} \right) = (1-m-n : m : n) \Rightarrow \begin{cases} p = \frac{m}{1-m-n} \\ q = \frac{n}{1-m-n} \end{cases}$$

Además, como:

$$\begin{cases} D' = (p+q+2pq : pq : pq) \\ E' = (q : p+2q+pq : q) \\ F' = (p : p : 2p+q+pq) \end{cases}$$

TRIÁNGULOS CABRI

por lo que:

$$\begin{aligned}
 \frac{(D'E'F')}{(ABC)} &= \frac{\begin{vmatrix} p+q+2pq & pq & pq \\ q & p+2q+pq & q \\ p & p & 2p+q+pq \end{vmatrix}}{(p+q+4pq)(p+4q+pq)(4p+q+pq)} \\
 &= \frac{2(p+q+pq)^3}{(p+q+4pq)(p+4q+pq)(4p+q+pq)} \\
 &= \frac{2[(1-m-n)(m+n)+mn]^3}{[(1-m-n)(4m+n)+mn][(1-m-n)(m+4n)+mn][(1-m-n)(m+n)+4mn]}
 \end{aligned}$$

- ⑧ Si el punto P tiene coordenadas (m, n) ($0 < m < 1, 0 < n < 1, m+n < 1$) respecto de la referencia afín $\{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$, entonces:

$$\left(\frac{1}{p+q+1} : \frac{p}{p+q+1} : \frac{q}{p+q+1} \right) = (1-m-n : m : n) \Rightarrow \begin{cases} p = \frac{m}{1-m-n} \\ q = \frac{n}{1-m-n} \end{cases}$$

y como:

$$\begin{cases} D'' = (0 : p : q) \\ E'' = (1 : 0 : q) \\ F'' = (1 : p : 0) \end{cases}$$

entonces:

$$\begin{aligned}
 \frac{(D''E''F'')}{(ABC)} &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & p & q \\ 1 & 0 & q \\ 1 & p & 0 \end{vmatrix}}{(1+p)(1+q)(p+q)} \\
 &= \frac{2pq}{(1+p)(1+q)(p+q)} \\
 &= \frac{2mn(1-m-n)}{(1-m)(1-n)(m+n)}
 \end{aligned}$$

- ⑨ Como las ecuaciones de las rectas paralelas a los lados del triángulo ABC pasando por el punto M son:

$$\begin{cases} p_{AB} \equiv 0 = (1+p+2q)x + (1+p+2q)y - (3+3p+2q)z \\ p_{BC} \equiv 0 = (2+3p+3q)x - (2+p+q)y - (2+p+q)z \\ p_{CA} \equiv 0 = (1+2p+q)x - (3+2p+3q)y + (1+2p+q)z \end{cases}$$

TRIÁNGULOS CABRI

resolviendo los correspondientes sistemas de ecuaciones, obtenemos que:

$$\begin{cases} H_1 = (3 + 3p + 2q : 0 : 1 + p + 2q) \\ H_2 = (3 + 2p + 3q : 1 + 2p + q : 0) \\ H_3 = (2 + p + q : 2 + 3p + 3q : 0) \\ H_4 = (0 : 3 + 3p + 2q : 1 + p + 2q) \\ H_5 = (0 : 1 + 2p + q : 3 + 2p + 3q) \\ H_6 = (2 + p + q : 0 : 2 + 3p + 3q) \end{cases}$$

por lo que, al ser la ecuación de una cónica general de la forma:

$$dx^2 + ey^2 + fz^2 + gxy + hxz + iyz = 0 \quad (d, e, f, g, h, i \in \mathbb{R})$$

imponiendo que circunscriba al pentágono $H_1H_2H_3H_4H_5$, resulta que:

$$\begin{cases} d = (p + 2q + 1)(2p + q + 1)(3p + 3q + 2) \\ e = (p + q + 2)(p + 2q + 1)2p + 3q + 3) \\ f = (p + q + 2)(2p + q + 1)(3p + 2q + 3) \\ g = -2(p + 2q + 1)(4p^2 + 5q^2 + 9pq + 9p + 9q + 4) \\ h = -2(2p + q + 1)(5p^2 + 4q^2 + 9pq + 9p + 9q + 4) \\ i = -2(p + q + 2)(4p^2 + 4q^2 + 9pq + 9p + 9q + 5) \end{cases}$$

por lo que la ecuación de la cónica circunscrita al pentágono $H_1H_2H_3H_4H_5$ es:

$$(p+2q+1)(3p+3q+2)x^2 + (p+q+2)(p+2q+1)2py + (p+q+2)(p+2q+1)(3p+2q+3)z^2 - 2(p+2q+1)(4p^2+5q^2+9pq+9p+9q+4)xyz - 2(p+q+1)(5p^2+4q^2+9pq+9p+9q+4)xz - 2(p+q+2)(4p^2+4q^2+9pq+9p+9q+5)yz = 0$$

estando el punto H_6 situado sobre dicha cónica (ya que sus coordenadas verifican la ecuación de ésta), por lo que esta circunscribe al hexágono $H_1H_2H_3H_4H_5H_6$. Además, esta cónica es una elipse, ya que es no degenerada, pues:

$$\begin{vmatrix} (p+2q+1)(3p+3q+2) & -(p+q+2)(p+2q+1)2p+3q+3 & -(p+q+2)(p+2q+1)(3p+2q+3) & -2(p+2q+1)(4p^2+5q^2+9pq+9p+9q+4) \\ -(p+q+2)(p+2q+1)2p+3q+3 & (p+q+2)(4p^2+4q^2+9pq+9p+9q+5) & (p+q+2)(2p+q+1)(3p+2q+3) & -2(p+q+1)(5p^2+4q^2+9pq+9p+9q+4) \\ -(p+q+2)(p+2q+1)(3p+2q+3) & (p+q+2)(4p^2+4q^2+9pq+9p+9q+5) & (p+q+2)(2p+q+1)(3p+2q+3) & -2(p+q+1)(5p^2+4q^2+9pq+9p+9q+4) \\ -2(p+2q+1)(4p^2+5q^2+9pq+9p+9q+4) & -2(2p+q+1)(5p^2+4q^2+9pq+9p+9q+4) & -2(p+q+2)(4p^2+4q^2+9pq+9p+9q+5) & -64(1+p+q)^2(2+p+q)(1+2p+q)(1+2q)(5+11p+5p^2+11q+11pq+5q^2) \end{vmatrix} = 0$$

y no tiene ningún punto en la recta del infinito, ya que el discriminante del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = (p+2q+1)(3p+3q+2)x^2 + (p+q+2)(p+2q+1)2py + (p+q+2)(p+2q+1)(3p+2q+3)z^2 - 2(p+2q+1)(4p^2+5q^2+9pq+9p+9q+4)xyz - 2(p+q+1)(5p^2+4q^2+9pq+9p+9q+4)xz - 2(p+q+2)(4p^2+4q^2+9pq+9p+9q+5)yz \\ 0 = x+y+z \end{cases}$$

es:

$$\Delta_4 = -256(p+q+1)^4(p^2+q^2+3pq+3p+3q+1) < 0$$

Finalmente, como las coordenadas del centro T de esta cónica (conjugado de la recta del infinito respecto de ella) vienen dadas por la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (p+2q+1)(2p+q+1)(3p+3q+2) & -(2p+q+1)(5p^2+4q^2+9pq+9p+9q+4) & -(2p+q+1)(5p^2+4q^2+9pq+9p+9q+4) \\ -(2p+q+1)(5p^2+4q^2+9pq+9p+9q+4) & (p+q+2)(p+2q+1)2p+3q+3 & -(p+q+2)(4p^2+4q^2+9pq+9p+9q+5) \\ -(2p+q+1)(5p^2+4q^2+9pq+9p+9q+4) & -(p+q+2)(4p^2+4q^2+9pq+9p+9q+5) & (p+q+2)(2p+q+1)(3p+2q+3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (p+2q+1)(2p+q+1)(3p+3q+2) & -(2p+q+1)(5p^2+4q^2+9pq+9p+9q+4) & -(2p+q+1)(5p^2+4q^2+9pq+9p+9q+4) \\ -(2p+q+1)(5p^2+4q^2+9pq+9p+9q+4) & (p+q+2)(p+2q+1)2p+3q+3 & -(p+q+2)(4p^2+4q^2+9pq+9p+9q+5) \\ -(2p+q+1)(5p^2+4q^2+9pq+9p+9q+4) & -(p+q+2)(4p^2+4q^2+9pq+9p+9q+5) & (p+q+2)(2p+q+1)(3p+2q+3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

TRIÁNGULOS CABRI

entonces:

$$T = ((2+p+q)(1+5p+3p^2+5q+7pq+3q^2) : (1+2p+q)(3+5p+p^2+7q+5pq+3q^2) : (1+p+2q)(3+7p+3p^2+5q+5pq+q^2))$$

por lo que este punto coincide con el punto G si y sólo si:

$$(0,0,0) = ((2+p+q)(1+5p+3p^2+5q+7pq+3q^2), (1+2p+q)(3+5p+p^2+7q+5pq+3q^2), (1+p+2q)(3+7p+3p^2+5q+5pq+q^2)) \times (1,1,1)$$

$$(0,0,0) = ((p-q)(1+p-p^2+q-pq-q^2), (1-q)(1-p-p^2+q-pq+q^2), (p-1)(1+p+p^2-q-pq-q^2))$$

es decir, si y sólo si $p = q = 1$ (única solución con $p > 0$ y $q > 0$), o lo que es lo mismo, si y sólo si $P = G$.

⑩ Como $G = (1 : 1 : 1)$ y:

$$\begin{cases} H_1 = (3+3p+2q : 0 : 1+p+2q) \\ H_2 = (3+2p+3q : 1+2p+q : 0) \\ H_3 = (2+p+q : 2+3p+3q : 0) \\ H_4 = (0 : 3+3p+2q : 1+p+2q) \\ H_5 = (0 : 1+2p+q : 3+2p+3q) \\ H_6 = (2+p+q : 0 : 2+3p+3q) \end{cases}$$

entonces:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(GH_2H_3)}{(ABC)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3+2p+3q & 1+2p+q & 0 \\ 2+p+q & 2+3p+3q & 0 \end{vmatrix}}{48(1+p+q)} = \frac{1+p+2q}{12(1+p+q)} \\ \frac{(GH_4H_5)}{(ABC)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3+3p+2q & 1+p+2q \\ 0 & 1+2p+q & 3+2p+3q \end{vmatrix}}{3} = \frac{2+p+q}{12(1+p+q)} \\ \frac{(GH_6H_1)}{(ABC)} + \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2+p+q & 0 & 2+3p+3q \\ 3+3p+2q & 0 & 1+p+2q \end{vmatrix}}{3} = \frac{1+2p+q}{12(1+p+q)} \end{array} \right.$$

por lo que:

$$\frac{(GH_2H_3)}{(ABC)} + \frac{(GH_4H_5)}{(ABC)} + \frac{(GH_6H_1)}{(ABC)} = \frac{1+p+2q}{12(1+p+q)} + \frac{2+p+q}{12(1+p+q)} + \frac{1+2p+q}{12(1+p+q)} = \frac{1}{3}$$

TRIÁNGULOS CABRI

