

Pr. Cabri 958

Enunciado

Sea un cuadrilátero convexo ABCD. Consideremos los 4 triángulos resultantes de agrupar los vértices de 3 en 3 y calculemos sus circuncentros A' , B' , C' y D' . Demostrar que los cuadriláteros ABCD y $A'B'C'D'$ tienen ángulos suplementarios.

¿Y si el cuadrilátero es cóncavo o se autointerseca?

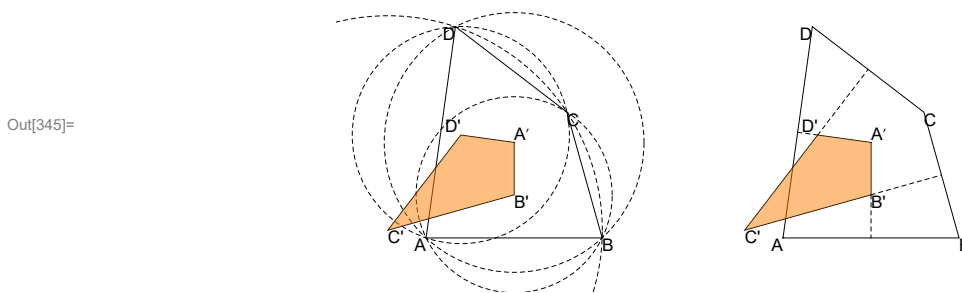
Propuesto por César Beade Franco

Solución

de César Beade Franco

I. Se sobreentiende que los puntos A' , B' , C' y D' se toman en el orden adecuado para limitar un cuadrilátero convexo. Así podemos definir A' como el circuncentro de DAB, B' el de ABC, etc. A este cuadrilátero $A'B'C'D'$ le llamaré (impropiamente) suplementario.

Dibujo 1

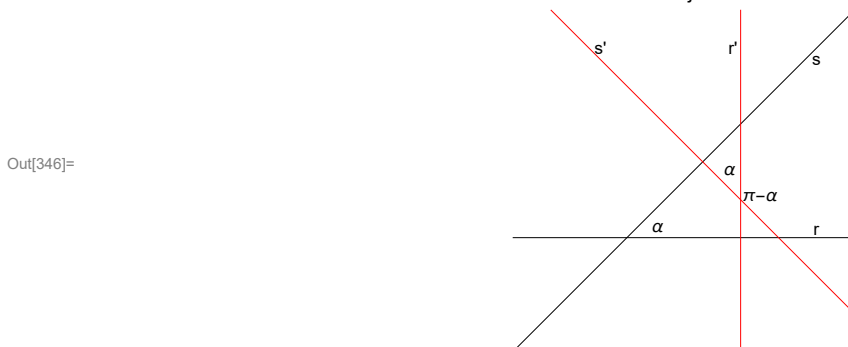


Observando el dibujo anterior concluimos que los cuadriláteros tienen perpendiculares los lados correspondientes, lo que parece lógico ya que $A'B'C'D'$ se obtiene intersectando sucesivamente las mediatrices de ABCD así:

$A' = m(DA) \cap m(AB)$, $B' = m(AB) \cap m(BC)$, etc.

II. Analicemos los ángulos que resultan de cortar dos rectas r , s , por sendas perpendiculares, r' , s' .

Dibujo 2



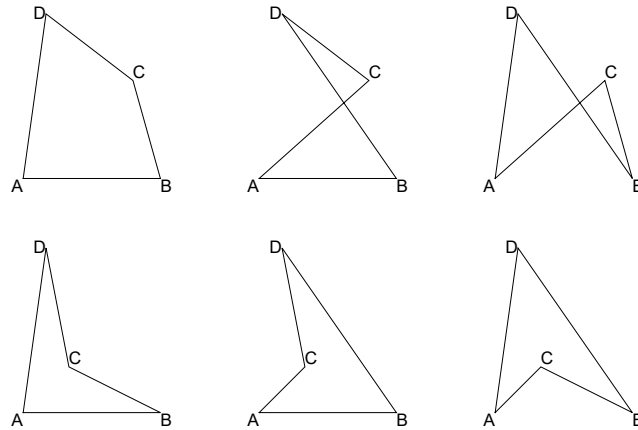
Si el ángulo r , s medido en cierto sentido, por ejemplo antihorario, es α , las perpendiculares r' y s' determinarán un ángulo α si mantenemos el sentido de r a s , o un ángulo

$\pi - \alpha$ si lo invertimos. Podemos interpretar que r y s giran $\pm \frac{\pi}{2}$. Según giren los mismos ángulo u opuestos, el ángulo entre r' y s' será α o $\pi - \alpha$.

III. 4 puntos en los que ninguno es interior al triángulo formado por los otros 3 determinan 3 cuadriláteros distintos, uno convexo, y dos con autointersecciones.

Si hubiera un punto interior, determinarían 3 cuadriláteros cóncavos.

Dibujo 3

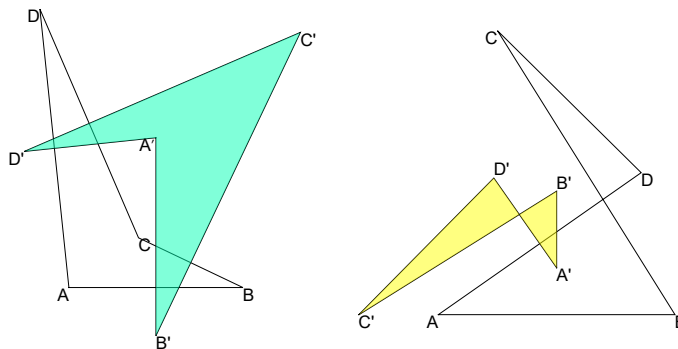


Out[348]=

IV. En el caso del cuadrilátero convexo su suplementario es también convexo. Observamos que B y D quedan a cada lado de la diagonal AC y viceversa. Sus vértices se obtienen al intersecar mediatrices de lados consecutivos. Por ejemplo $A' = A' = m(DA) \cap m(AB)$ donde $m(DA)$ es el lado DA girado en sentido horario y $m(AB)$ es el AB girado en sentido contrario. De ahí que los ángulos A y A' sean suplementarios. Y el cuadrilátero $A'B'C'D'$ está recorrido en sentido contrario al $ABCD$.

V. La situación cambia en los otros casos. Sin entrar en detalles de como deben medirse los ángulos en tales cuadriláteros (para que sumen 360°), constatamos que en todos ellos el sentido de recorrido de $ABCD$ y $A'B'C'D'$ es el mismo. La cosa cambia para los ángulos. En los cóncavos los ángulos son suplementarios a C y A (ángulo cóncavo y opuesto) en C' y A' e iguales en los otros vértices. En los autointersecantes se mantienen los valores de los ángulos.

Dibujo 4



Out[369]=