**<u>Problema 958.</u>** (propuesto por César Beade Franco) Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Consideremos los cuatro triángulos resultantes de agrupar los vértices de tres en tres y sus respectivos circuncentros $A' = O_{ABD}$, $B' = O_{ABC}$, $C' = O_{BCD}$ y $D' = O_{ACD}$. Demostrar que los cuadriláteros $ABCD$ y $A'B'C'D'$ tienen ángulos suplementarios. ¿ Y si el cuadrilátero $ABCD$ es cóncavo o se interseca ?.

*<u>Solución:</u>*

Vamos a suponer que el cuadrilátero $ABCD$ no es cíclico, ya que, si lo fuese, los cuatro puntos $A'$, $B'$, $C'$ y $D'$ coincidirían, por lo que el problema no tendría sentido.

① Si el cuadrilátero $ABCD$ es convexo, entonces, ninguno de sus vértices es interior al triángulo determinado por los tres vértices restantes, por lo que, en particular, el vértice $D$ ha de ser exterior al triángulo $ABC$ y debe estar situado sobre la región del plano (sobre el que está contenido el cuadrilátero $ABCD$) determinada por los semirrectas $BA$ y $BC$. Además, como el cuadrilátero $ABCD$ no es cíclico, el punto $D$ no puede estar situado sobre la circunferencia circunscrita al triángulo $ABC$, por lo que vamos a distinguir dos casos, siendo la recta $B'A'$ la mediatriz $m_{BA}$ del segmento $BA$ y la recta $B'C'$ la mediatriz $m_{BC}$ del segmento $BC$:

❶ Si el punto $D$ es exterior a dicha circunferencia, resulta que:

$$\beta = \measuredangle BDC < \measuredangle BAC = \theta$$

por lo que:

$$\measuredangle BC'C = 2\beta < 2\theta = \measuredangle BOC$$

y, por tanto, el punto $C'$ está situado sobre la semirrecta (de las dos semirrectas que determina el punto $B'$ sobre la recta $m_{BC}$) que no interseca al segmento $BC$. Razonando de forma totalmente análoga, podemos concluir que el punto $A'$ está situado sobre la semirrecta (de las dos semirrectas que determina el punto $B'$ sobre la recta $m_{BA}$) que no interseca al segmento $BA$. Por tanto:

$$\measuredangle A'B'C' = \measuredangle(m_{BA}, m_{BC})$$

❷ Si el punto $D$ es interior a dicha circunferencia, resulta que:

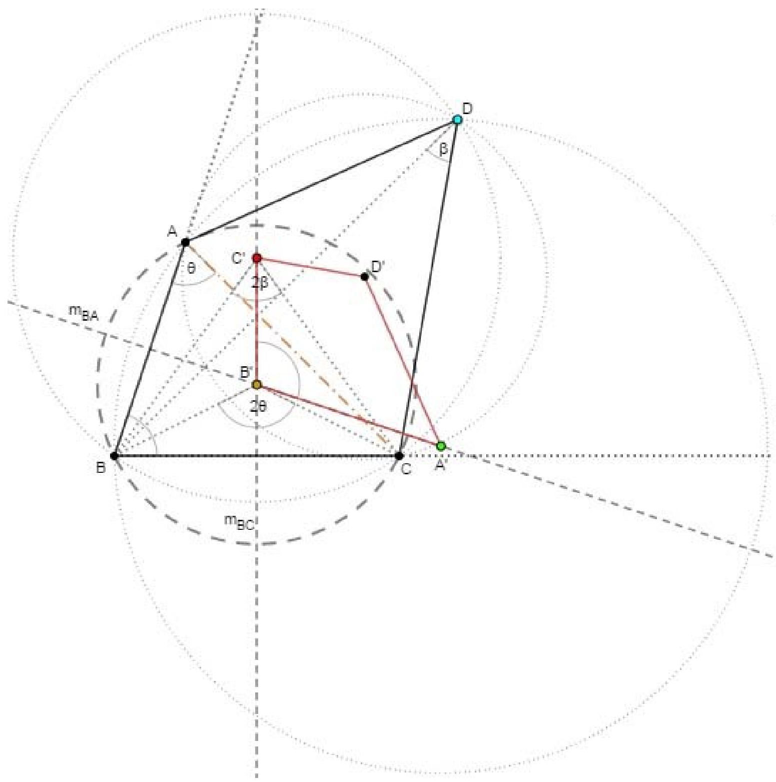
$$\beta = \measuredangle BDC > \measuredangle BAC = \theta$$

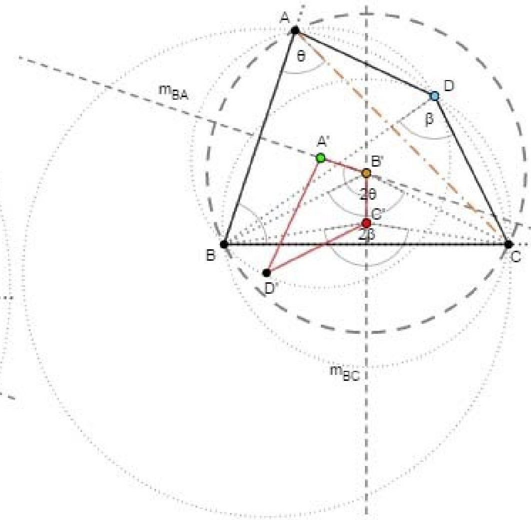
por lo que:

$$\measuredangle BC'C = 2\beta > 2\theta = \measuredangle BOC$$

y, por tanto, el punto $C'$ está situado sobre la semirrecta (de las dos semirrectas que determina el punto $B'$ sobre la recta $m_{BC}$) que interseca al segmento $BC$. Razonando de forma totalmente análoga, podemos concluir que el punto $A'$ está situado sobre la semirrecta (de las dos semirrectas que determina el punto $B'$ sobre la recta $m_{BA}$) que interseca al segmento $BA$. Por tanto:

$$\measuredangle A'B'C' = \measuredangle(m_{BA}, m_{BC})$$




Una vez aclarado todo esto, como las mediatrices $m_{BA}$ y $m_{BC}$ forman ángulos rectos con las rectas $BA$ y $BC$, respectivamente, entonces, el ángulo $\measuredangle(m_{BA}, m_{BC})$ opuesto al ángulo $\measuredangle CBA$ en el cuadrilátero que determinan estas cuatro rectas verifica que:

$$\measuredangle(m_{BA}, m_{BC}) = 2\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \measuredangle CBA = \pi - \measuredangle CBA$$

por lo que:

$$\measuredangle A'B'C' = \measuredangle(m_{BA}, m_{BC}) = \pi - \measuredangle CBA$$

y, razonando de forma totalmente análoga, obtendríamos que:

$$\begin{cases} \measuredangle B'C'D' = \pi - \measuredangle DCB \\ \measuredangle C'D'A' = \pi - \measuredangle ADC \\ \measuredangle D'A'B' = \pi - \measuredangle BAD \end{cases}$$

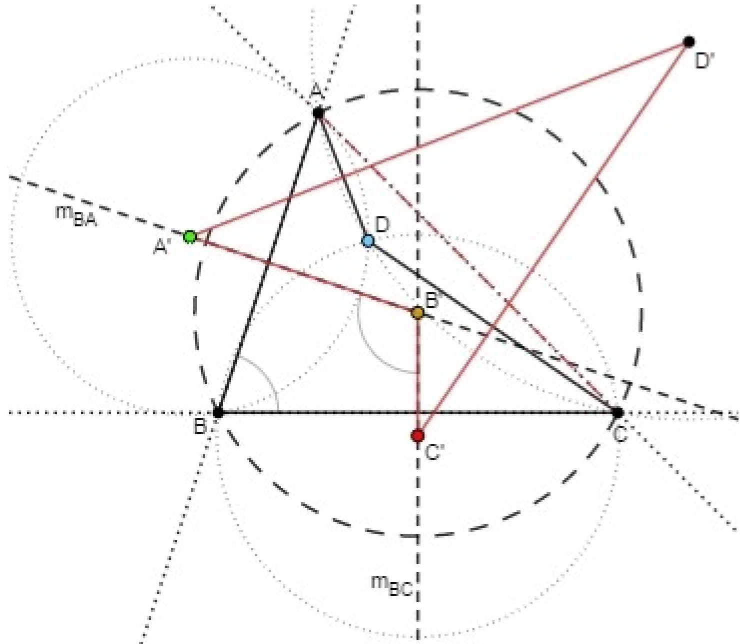
② Si el cuadrilátero $ABCD$ es cóncavo, alguno de sus vértices es interior al triángulo determinado por los tres vértices restantes, por lo que vamos a distinguir cuatro casos:

❶ Si el vértice $D$ es interior al triángulo $ABC$, entonces, es interior a su circunferencia circunscrita, por lo que, razonando igual que para el caso convexo, resulta que:

$$\measuredangle A'B'C' = \measuredangle(m_{BA}, m_{BC}) = \pi - \measuredangle CBA$$

(en este caso el vértice $B$ corresponde al ángulo opuesto al ángulo cóncavo)

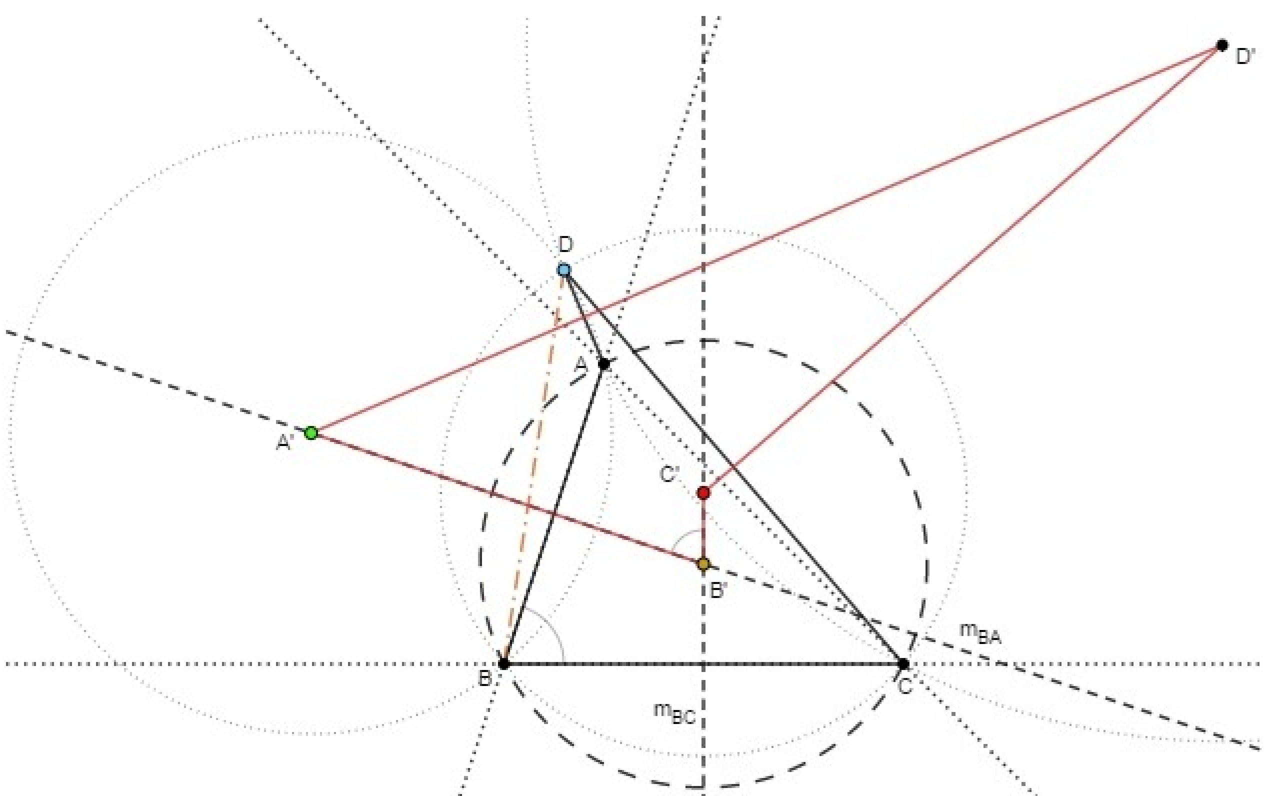
# TRIÁNGULOS CABRI




❷ Si el vértice $A$ es interior al triángulo $BCD$, entonces, el vértice $D$ es exterior a la circunferencia circunscrita al triángulo $ABC$, por lo que, razonando igual que para el caso convexo, resulta que:

$$\triangle A'B'C' = \triangle(m_{BC}, m_{BA}) = \triangle CBA$$

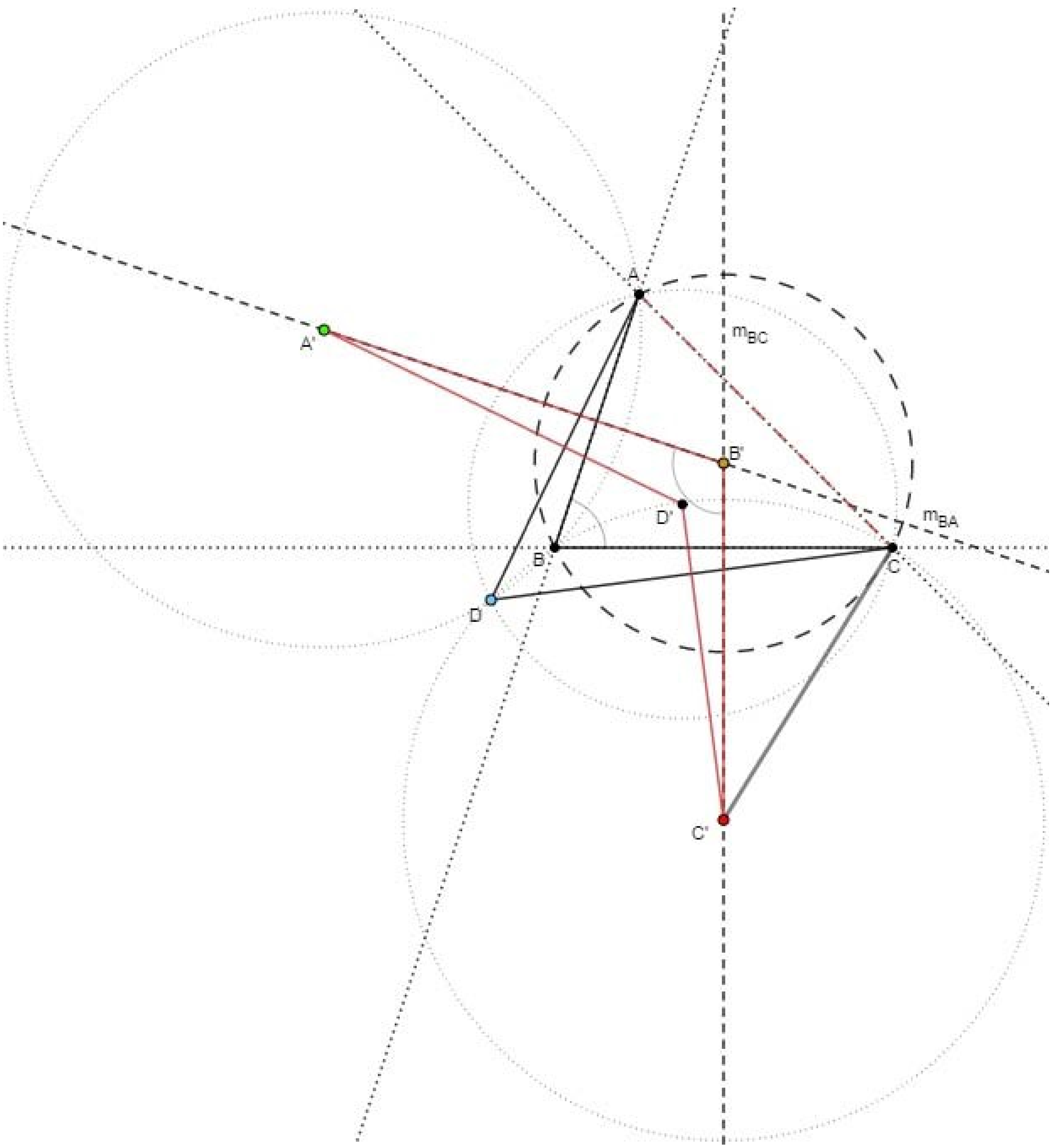
(en este caso el vértice $B$ no corresponde ni al ángulo cóncavo ni a su ángulo opuesto)



❸ Si el vértice $B$ es interior al triángulo $ADC$, entonces, el vértice $D$ es exterior a la circunferencia circunscrita al triángulo $ABC$, por lo que, razonando igual que para el caso convexo, resulta que:

$$\measuredangle A'B'C' = \measuredangle(m_{BA}, m_{BC}) = \pi - \measuredangle CBA$$

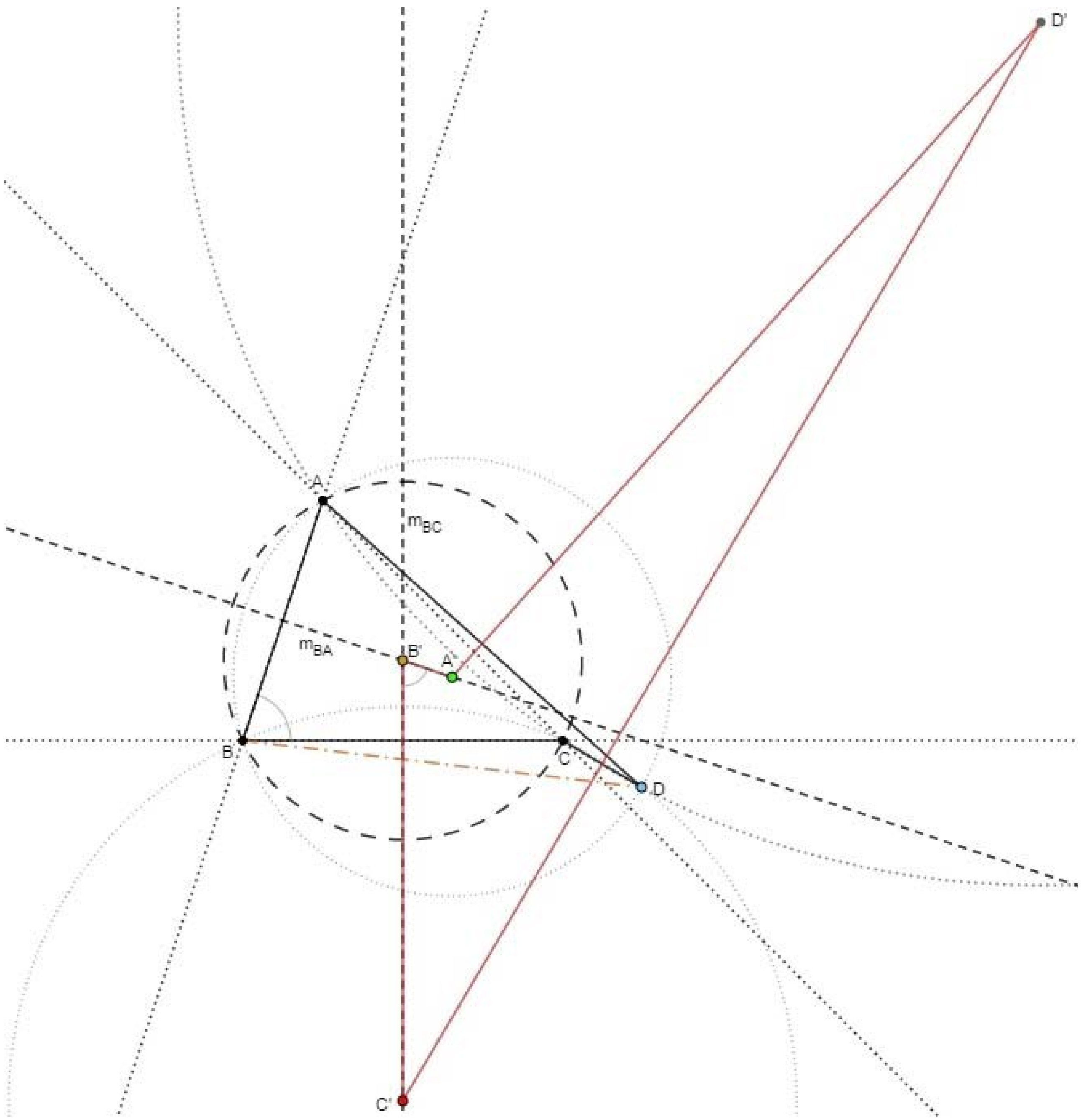
(en este caso el vértice $B$ corresponde al ángulo cóncavo)



❹ Si el vértice $C$ es interior al triángulo $ABD$, entonces, el vértice $D$ es exterior a la circunferencia circunscrita al triángulo $ABC$, por lo que, razonando igual que para el caso convexo, resulta que:

$$\triangle A'B'C = \triangle(m_{BC}, m_{BA}) = \triangle CBA$$

(en este caso el vértice $B$ no corresponde ni al ángulo cóncavo ni a su ángulo opuesto)



Podemos, pues, concluir que, si el cuadrilátero $ABCD$ es cóncavo, por ejemplo en el vértice $D$, entonces:

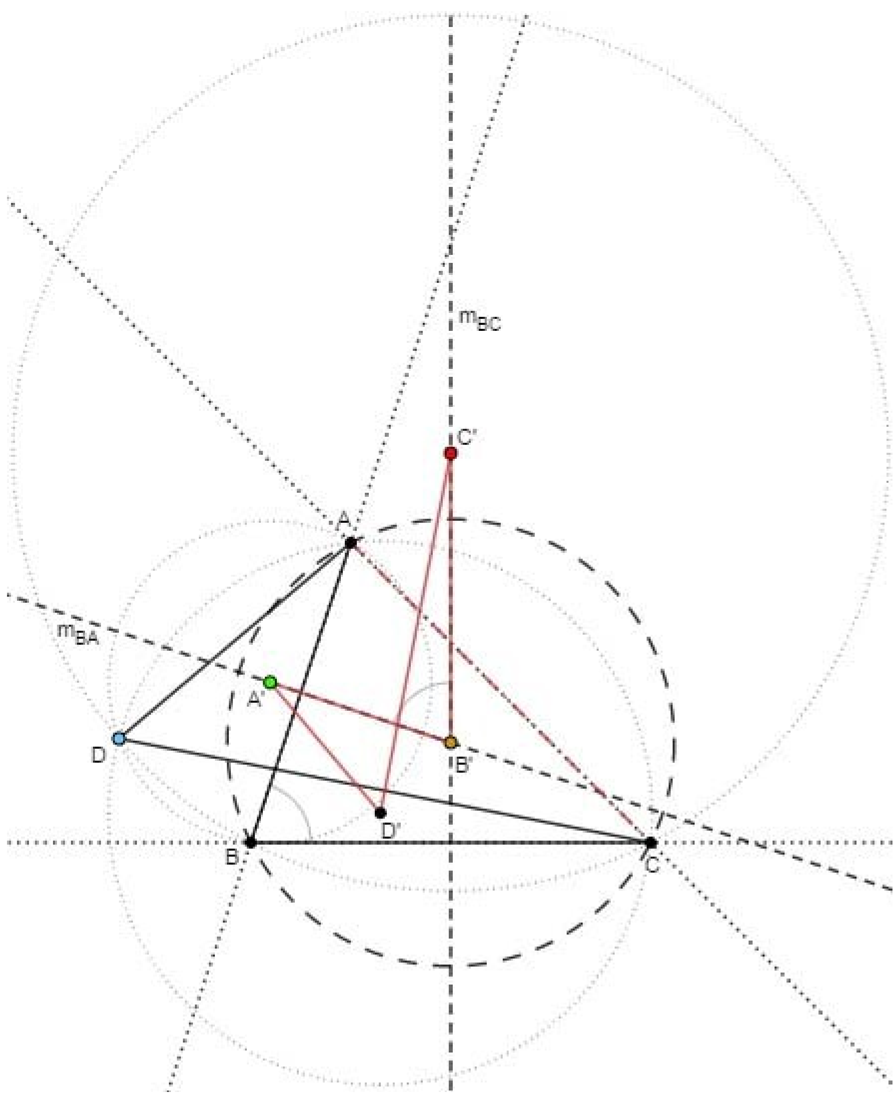
$$\begin{cases} \measuredangle A'B'C' = \pi - \measuredangle CBA \\ \measuredangle B'C'D' = \measuredangle DCB \\ \measuredangle C'D'A' = \pi - \measuredangle ADC \\ \measuredangle D'A'B' = \measuredangle BAD \end{cases}$$

③ Si el cuadrilátero $ABCD$ se interseca, vamos a distinguir también dos casos:

❶ Si el punto $D$ está situado sobre la región del plano (sobre el que está contenido el cuadrilátero $ABCD$) determinada por los semirrectas $CA$ y $CB$ (tanto si es exterior como si es interior a la circunferencia circunscrita al triángulo $ABC$), razonando de igual forma que en el caso convexo, resulta que:

$$\measuredangle C'B'A' = \measuredangle(m_{BC}, m_{BA}) = \measuredangle CBA$$

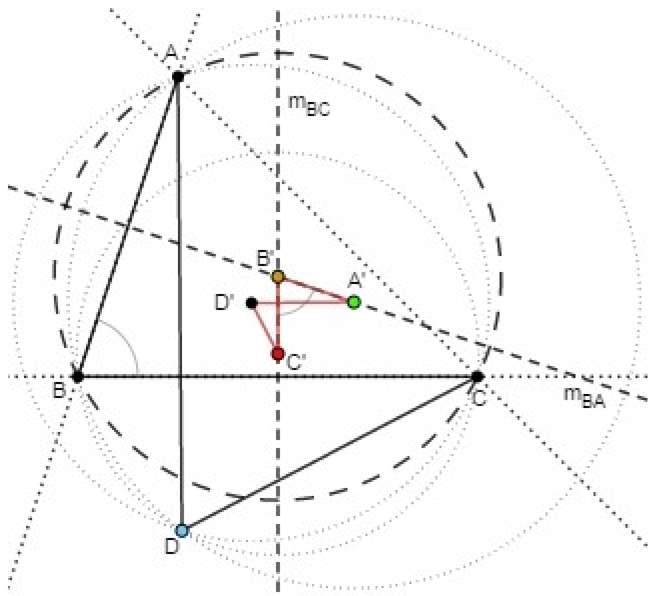
(en este caso $AB$ interseca a $CD$)



❷ Si el punto $D$ está situado sobre la región del plano (sobre el que está contenido el cuadrilátero *ABCD*) determinada por los semirrectas $AB$ y $AC$ (tanto si es exterior como si es interior a la circunferencia circunscrita al triángulo *ABC*), razonando de igual forma que en el caso convexo, resulta que:

$$\measuredangle C'B'A' = \measuredangle(m_{BC}, m_{BA}) = \measuredangle CBA$$

(en este caso $AD$ interseca a $BC$)




Podemos, pues, concluir que si el cuadrilátero *ABCD* se interseca, entonces:

$$\begin{cases} \measuredangle C'B'A' = \measuredangle CBA \\ \measuredangle B'C'D' = \measuredangle DCB \\ \measuredangle C'D'A' = \measuredangle ADC \\ \measuredangle D'A'B' = \measuredangle BAD \end{cases}$$