
Enunciado

Para un triángulo ABC, se consideran el punto medio D del segmento AC, el punto E de intersección entre la recta BC y la recta tangente en el punto A a la circunferencia circunscrita al triángulo

ABD, el centro Q de la circunferencia circunscrita al triángulo ABE y el punto medio N del segmento AQ.

Dado un segmento BC fijo, determinar el lugar geométrico que describe el punto A cuando el punto N

correspondiente al triángulo ABC está situado sobre la circunferencia circunscrita al triángulo ABD.

Propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega.

Solución

de César Beade Franco

Consideremos el triángulo A(a,b), B(0,0), C(1,0). Así que $D=(\frac{1+a}{2}, \frac{b}{2})$ y la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo ABD es

$$-b x - 2 a b x + a^2 b x + b^3 x + 2 b x^2 + a y - a^3 y - 2 b^2 y - a b^2 y + 2 b y^2 = 0$$

y la tangente a la misma por A tiene ecuación

$$a^2 b (-2 + x) - a^3 y + b (b^2 (-2 + x) - x + 2 b y) + a (2 b x + y - b^2 y) = 0$$

La intersección de esta tangente con la recta BC, $y=0$, nos proporciona el punto $E(\frac{2(a^2+b^2)}{-1+2a+a^2+b^2}, 0)$.

Con cálculos parecidos obtenemos el centro de ABE,

$$Q(\frac{a^2+b^2}{-1+2a+a^2+b^2}, \frac{(-1+a^2+b^2)(a^2+b^2)}{2b(-1+2a+a^2+b^2)}) \text{ y el punto medio de AQ,}$$

$$N(\frac{1}{2} \left(a + \frac{a^2+b^2}{-1+2a+a^2+b^2} \right), \frac{1}{2} \left(b + \frac{(-1+a^2+b^2)(a^2+b^2)}{2b(-1+2a+a^2+b^2)} \right)).$$

Si a N le imponemos la condición de que satisfaga la ecuación de ABD, obtenemos una relación entre a y b que podemos considerar como la ecuación implícita del lugar buscado.

Esta expresión (cambiando a por x y b por y), resulta ser

$$(-1+2x) \left((-1+x)^2 + y^2 \right) (x^2 + y^2) \left((1+x)^2 + y^2 \right) (x(2+x) + y^2) = 0.$$

Esta ecuación representa los puntos B, C, (-1,0), la circunferencia $x(2+x) + y^2 = 0$ de centro (-1,0), simétrico de B respecto a C, y radio BC y la recta $x = \frac{1}{2}$, mediatriz de BC.

Out[431]=

