TRIÁNGULOS CABRI

<u>Problema 959.</u> (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Para un triángulo ABC, se consideran el punto medio D del segmento AC, el punto E de intersección entre la recta tangente en el punto A y la recta BC, el centro Q de la circunferencia circunscrita al triángulo ABE y el punto medio M del segmento OQ. Dado un segmento BC fijo, determinar el lugar geométrico que describe el punto A cuando el punto M está situado sobre la circunferencia circunscrita al triángulo ABD.

<u>*Solución:*</u>

Si A es uno de estos puntos, coniderando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, como $D=(1:0:1)$, entonces, la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo ABD es:

$$2c^2xy+b^2xz+(2a^2-b^2)yz-b^2z^2=0$$

por lo que la ecuación de su recta tangente en el punto A es:

$$AE \equiv 0=\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2c^2 & b^2 \\ 2c^2 & 0 & 2a^2-b^2 \\ b^2 & 2a^2-b^2 & -2b^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=2c^2y+b^2z$$

luego:

$$E=AE\cap BC=(0:b^2:-2c^2)$$

y, por tanto, la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo ABE es:

$$c^2(2c^2-b^2)xy+b^2(a^2-b^2+2c^2)xz+2a^2c^2yz+a^2b^2z^2=0$$

siendo su centro (conjugado de la recta del infinito) el punto:

$$Q=(2a^2c^2(a^2-c^2):-b^2(a^4+b^4-3b^2c^2+2c^4+a^2(-2b^2+c^2)):c^2(b^4-3b^2c^2+2c^4-a^2(b^2+2c^2)))$$

Además, como el punto medio del segmento AQ es:

$$N=(-a^4(b^2-4c^2)-(b^2-2c^2)(b^2-c^2)^2+2a^2(b^4-b^2c^2-3c^4):-b^2(a^4+b^4-3b^2c^2+2c^4+a^2(-2b^2+c^2)):c^2(b^4-3b^2c^2+2c^4-a^2(b^2+2c^2)))$$

imponiendo que este punto esté situado sobre la circunferencia circunscrita al triángulo ABD, obtenemos que:

$$\underbrace{2b^2c^2(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(b+c)}_{\neq 0}(b-c)(a^2-b^2+2c^2)(2a^2-b^2+2c^2)=0$$

es decir:

$$(b-c)(a^2-b^2+2c^2)(2a^2-b^2+2c^2)=0$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

TRIÁNGULOS CABRI

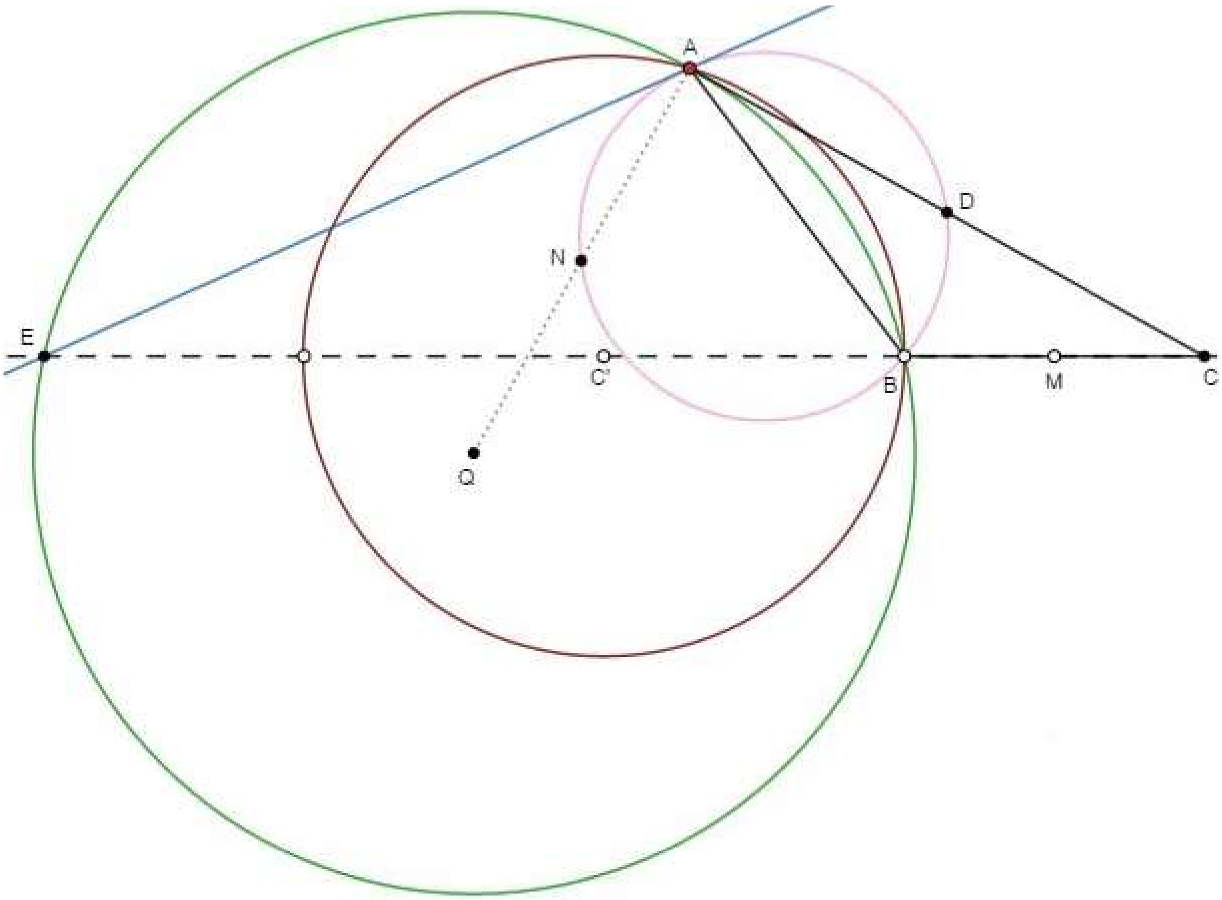
Finalmente, considerando el sistema de referencia cartesiano de ejes rectangulares con origen en el punto medio M del segmento BC y eje de abscisas en la recta BC y tomando como unidad de medida la semilongitud del segmento BC, si $A=(x,y)\ (y\neq 0)$, como:

$$\left\{\begin{array}{l} C=(1,0) \\ B=(-1,0) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=BC=2 \\ b=AC=\sqrt{(x-1)^2+y^2} \\ c=AB=\sqrt{(x+1)^2+y^2} \end{array}\right.$$

entonces:

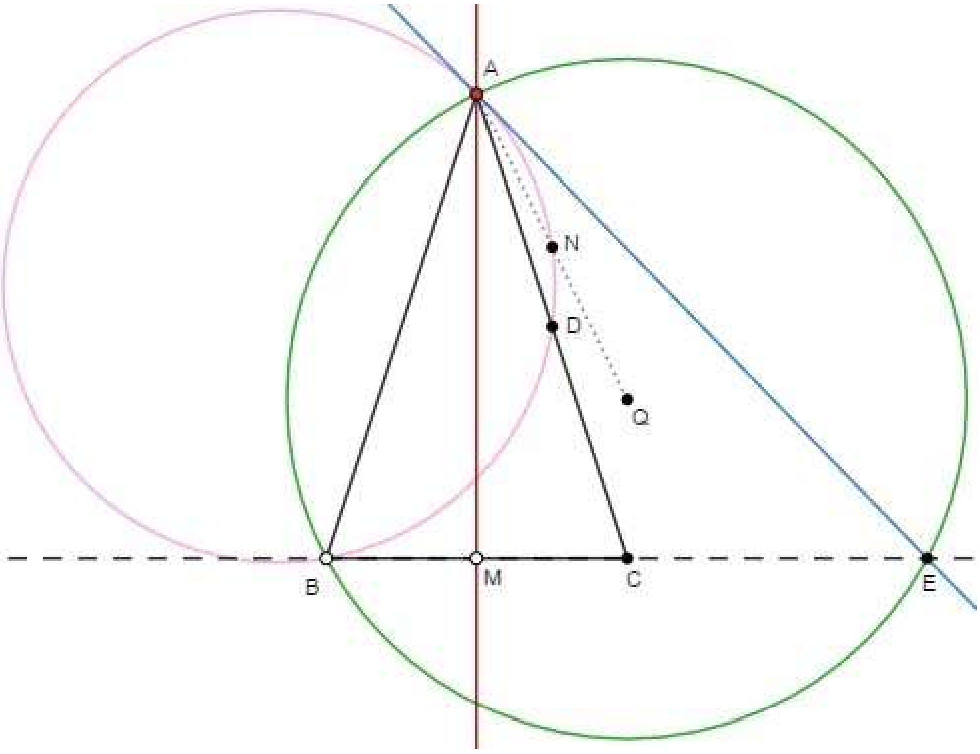
$$0=x(x^2+6x+y^2+5)(x^2+6x+y^2+9)=x\left[(x+3)^2+y^2-4\right]\left[(x+3)^2+y^2\right]$$

por lo que el punto A debe estar situado sobre la recta mediatriz del segmento BC, sobre la circunferencia con centro en el punto C' simétrico del punto C con respecto al punto B y radio igual a BC o en el punto C', debiendo exceptuar los puntos que se encuentran sobre la recta BC (ya que, en estos casos, los puntos A, B y C estarían alineados).



Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

TRIÁNGULOS CABRI



Miguel-Ángel Pérez García-Ortega